Série 13, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Calculer la diagonalisation en base orthonormée des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution : *La matrice A est orthodiagonalisable car elle est symétrique. Il faut calculer les valeurs propres et une base orthonormale de espaces propres associé. Le polynome caractéristique de A est* $\det A - \lambda I = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$.

[... manquent tous les calculs et la solution finale ...]

On obtient

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,$$
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On procède comme pour A et on obtient les valeurs propres de B :

[... manquent tous les calculs et la solution finale ...]

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10,$$
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$