

Série 12, Rendu individuel (Corrigé)

Exercice 1

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés, i.e. la droite de régression linéaire pour les points (x_i, y_i) .

Solution : Le système linéaire correspondant est $\mathbf{y} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation normale correspondante est $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T \mathbf{y}$. On multiplie donc par A^T le système et on obtient

$$A^T A = \begin{pmatrix} 129 & 21 \\ 21 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 54 \\ 9 \end{pmatrix}$$

L'inverse de $A^T A$ est

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{75} & -\frac{7}{75} \\ -\frac{7}{25} & \frac{43}{25} \end{pmatrix}$$

On obtient la solution $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{pmatrix}$.