Série 11, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Soient

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et A une matrice 3×3 à coefficients réels telle que :

- $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_1}$
- $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_2}$

(a) Calculer le polynôme caracteristique de A dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$?

(b) Calculer D et P tels que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.

(c) Calculez P^{-1}.

(d) *Optionnel : calculez A*

Rappel :

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2\cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1$$
$$-ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} = -i2\frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2\sin(\pi/3) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Solution :

Analyse du problème :

Puisque les coefficients de A sont réels, et λ_2 ne l'est pas, on peut trouver un couple de valeur et vecteur propre en prenants le complexe conjugué de l'égalité $A\mathbf{v_2} = \lambda_2\mathbf{v_2}$:

$$\overline{A\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2\mathbf{v_2}} \Leftrightarrow \overline{A}\overline{\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v_2}} \Leftrightarrow A\overline{\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v_2}}$$

Donc $\overline{\lambda_2}$ et $\overline{\mathbf{v_2}}$ sont une valeur et vecteur propre de A.

(a) Puisque $\lambda_3 := \overline{\lambda_2} \neq \lambda_2$, nous avons trois valeurs propres de A, qui est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

- $\lambda_3 = 2e^{-i\pi/3}$ *est une valeur propre associé au vecteur* $\mathbf{v_3} = \overline{\mathbf{v_2}} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le polynome caractéristique de A est

$$c_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t) = (\lambda_1 - 4)(\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_1)t - t^2) = (\lambda_1 - 4)(4 - 4\cos\frac{\pi}{3}\, t - t^2)$$

Il n'y a qu'une valeur propre rélle, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(b) *On la propriété suivante :* $A = PDP^{-1}$ *où D est diagonale et P inversible, avec les valeurs propres sur la diagonale de D et les vecteurs propres associés dans les colonnes de P (dans le même ordre, mais on a le choix, p.ex. "3,2,1").*

$$D = \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *L'inverse de P se calcule en calculant la forme échellonée réduite de la matrice* $(P|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -i & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-iL_1;L_2-L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1+iL_3;L_2-iL_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1+L_2}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i/2 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1 & 0 & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *On peut donc calculer* $A = PDP^1 =$

$$P \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ie^{i\pi/3} & e^{i\pi/3} & ie^{i\pi/3} \\ ie^{-i\pi/3} & e^{-i\pi/3} & -ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3} + 4 \\ -ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} & e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$