Série 8, Exercice en classe (Corrigé)

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $C_\lambda = A - \lambda I$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et I est la matrice identité 3×3.

a) Pour quelles valeurs de λ la matrices C_λ est inversibles ? *(Utilisez le déterminant de C_λ.)* Pour ces valeurs, calculez une base du noyau de C_λ.

b) Pour $\lambda = 5$, calculez $\det(C_\lambda)$ ainsi qu'une base du noyau de C_λ.

c) Pour $\lambda = 4$, calculez $\det(C_\lambda)$ et déterminez si $\dim \ker C_\lambda$ est égale à zéro.

Solution : *On va utiliser la propriété : C_λ inversible $\Leftrightarrow \det C_\lambda \neq 0$.*

$$\det C_\lambda = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = +(5-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Donc $\det C_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$ *ou* 5.

a) C_λ *est inversible* $\Leftrightarrow \det C_\lambda \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 4$ *et* $\neq 5)$.
Pour ces valeurs, $\operatorname{Ker} C_\lambda = \{\mathbf{0}\}$ *dont la base est l'ensemble vide.*

b) $\det C_5 = (5-5)^2(4-5) = 0$ *donc C_5 n'est pas inversible et son noyau n'est pas trivial.*

$$C_5 = \begin{pmatrix} 4-5 & 0 & -2 \\ 2 & 5-5 & 4 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [L_2 + 2L_1; -L_1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_2, x_3 sont des variable libre. Pour construire une base on a besoin de deux vecteurs. On choisi d'abord $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$ et ensuite $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$ et on obtient la base de $\operatorname{Ker} C_5$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vérification :

$$C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\det C_4 = (5-4)^2(4-4) = 0$ *donc C_4 n'est pas inversible et son noyau n'est pas trivial. Cela signifie que* $\dim \operatorname{Ker} C_4 > 0$.