

## Série 7, Rendu en groupe (Corrigé)

### Exercice 1

Soit  $\mathcal{B} = \{1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t\}$ .

- a) Vérifier que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

**Solution :** Une base est

- un ensemble générateur,  $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}_2$
- linéairement indépendant.

Puisque  $\mathbb{P}_2$  a dimension 3 et  $\mathcal{B}$  a trois éléments, il suffit de vérifier l'une des deux propriétés. Vérifions si  $\mathcal{B}$  est linéairement indépendant. Il faut résoudre

$$\alpha_1(1 - 3t^2) + \alpha_2(2 + t - 5t^2) + \alpha_3(1 + 2t) = 0 + 0t + 0t^2 \quad (1)$$

Si la seule solution est  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , alors  $\mathcal{B}$  est linéairement indépendant. Par comparaison des coefficients de l'équation (1), on obtien le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Cela se traduit dans la matrice augmenté suivante :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nous pouvons ignorer la dernière colonne car elle est nulle. La forme échelonnée réduite de cette matrice est l'identité (pas calculée explicitement ici, cf. plus bas pour une comparaison), donc les trois vecteurs de  $\mathcal{B}$  sont donc linéairement indépendants. Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ .

- b) Calculer la base  $\mathcal{C}$  en sachant que

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solution :**

$$([c_1]_{\mathcal{B}} [c_2]_{\mathcal{B}} [c_3]_{\mathcal{B}}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \text{ donc } [c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 10(1 - 3t^2) - 6(2 + t - 5t^2) + 3(1 + 2t) = 1.$$

$$c_2 = -5(1 - 3t^2) + 3(2 + t - 5t^2) - 1(1 + 2t) = t.$$

$$c_3 = 3(1 - 3t^2) - 2(2 + t - 5t^2) + 1(1 + 2t) = t^2.$$

c) Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ .

**Solution :** Puisque  $[1 - 3t^2]_{\mathcal{C}} = (1, 0, -3)^T$ ,  $[2 + t - 5t^2]_{\mathcal{C}} = (2, 1, -5)^T$  et  $[1 + 2t]_{\mathcal{C}} = (1, 2, 0)^T$ , on a

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} [b_2]_{\mathcal{C}} [b_3]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Écrire  $t^2$  comme combinaison linéaire des vecteurs de  $B$ .

**Solution :** Les coordonnées de  $t^2$  dans la base  $\mathcal{C}$  sont  $[t^2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Par définition de la matrice de passage  $P$  du b), les coordonnées de  $t^2$  dans la base  $B$  sont

$$[t^2]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[t^2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$