Série 6, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Soit $\mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 4 et $\mathbb{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivé, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

(a) Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.

(b) Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1+x, 2x, x+x^2, x+x^3, x+x^4\}$ de $\mathbb{P}_4$ et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3$, calculer la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$ associé à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la dérivée de $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$ en utilisant la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$.

(d) Calculer une base et la dimension du noyau de la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$. Quel est le rapport avec le noyay de T ?

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, ...$
Solution :

(a) Le noyau de la transformation T est l'ensemble des polynômes de p dans $\mathbb{P}_4$ tels que $T(p) = 0$. Seulement les constants ont dervée nulle, donc. $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_o \,, a_0 \in \mathbb{R}\}$*, dont une base est constitué du polynome constant $p(x) = 1$. On conclut aussi que* $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$. .

(b) On peut écrire

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{CB}} &= [[T(b_1)]_{\mathcal{C}}, [T(b_2)]_{\mathcal{C}}, [T(b_3)]_{\mathcal{C}}, [T(b_4)]_{\mathcal{C}}, [T(b_5)]_{\mathcal{C}}] \\
&= \Big[[1]_{\mathcal{C}}, [2]_{\mathcal{C}}, [1+2x]_{\mathcal{C}}, [1+3x^2]_{\mathcal{C}}, [1+4x^3]_{\mathcal{C}}\Big] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Pour $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$, il faut d'abord trouver ses coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$: Les coefficients α_j doivent satisfaire $\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2x) + \alpha_3(x+x^2) + \alpha_4(x+x^3) + \alpha_5(x+x^4) = q(x)$. Il faut que les coefficients de chaque monome soient égaux, ce qui revient à résoudre le système linéaire dont la matrice augmentéee est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right). \textit{ La solution est } [q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Contrôle : $1(1+x)-\frac{1}{2}x+0(x+x^2)+4(x+x^3)-(x+x^4) = 1+(1-1+4-1)x+4x^3-x^4 = q$
Les coefficients de sa dérivée q' peuvent être calculée comme suit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{[T]_{\mathcal{CB}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{[p]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{[T(p)]_{\mathcal{C}}},$$

cà-d, $q'(x) = 3 + 12x^2 - 4x^3$. Cela est cohérent avec le calcul direct de la dérivée de q.

(d) *En partant de la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$, qui est déjà sous forme forme échelonnée, on remarque qu'il y a 4 colonnes pivot, donc $\mathrm{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 4$. En utilisant le théorème de rang :*

$$\dim \operatorname{Ker} [T]_{\mathcal{CB}} = (\text{nombre de colonnes de } [T]_{\mathcal{CB}}) - \mathrm{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 5 - 4 = 1.$$

De plus, x_2 est la seule variable libre du système et une base du $\operatorname{Ker} [T]_{\mathcal{CB}}$ est par exemple :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Une base du noyau de $[T]_{\mathcal{CB}}$ est donnée par le polynome p tel que $[p]_{\mathcal{C}} = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$, c'est à dire $p(x) = -2(1 + x) + x = -2$, ce qui est cohérent avec le résultat au point (a), même si la base n'est pas égale. La dimension du noyau de $[T]_{\mathcal{CB}}$ est 1, comme la dimension du noyau de T.

Dans ce exercice, le contrôle est fait en regardant la correspondance entre les espaces des polynomes et les espaces coordonnées, par exemple entre T et $[T]_{\mathcal{CB}}$.