Série 5, Rendu personnel (Corrigé)

Exercice 1

Soit W le sous-espace vectiriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par l'ensemble suivant.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Quelle est la dimension de W ?
2. Trouver une base de W et la compléter.
3. Soit A la matrice 4x4 dont les colonnes sont les vecteurs de S (dans l'ordre donné ci-dessus). Calculer les rangs ligne et rangs colonne de A.
4. Trouver une base de $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(A)$ et de $\mathrm{Ker}(A)$.

Solution : Analyse de l'exercice $\mathrm{Col}(A) = W$, *donc on va se concentrer sur les propriétés de A et ensuite conclure pour W. Si on a un forme échellonée de A on peut facilement trouver une base de* $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(A)$ *et de* $\mathrm{Ker}(A)$ *(ici on peut être plus précis).*

Liste des outils

- *Opération sur les lignes de A.*
- *Calculer la forme échellonée de A pour identifier les bases de* $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(A)$ *et de* $\mathrm{Ker}(A)$.
- *Calculer la forme échellonée de A^T pour identifier les bases de* $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(A)$.

Résolution

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes pivots (1,2,3) de A forment un base de $\mathrm{Col}(A)$ *ainsi que de W :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Une base de $\mathrm{Lgn}(A)$ *est donnéee par le lignes de la forme échellonée :*

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Rang ligne et rang colonne de (A) *est égale à* $3 = \dim(W)$. *La dimensions de* $\mathrm{Ker}(A)$ *est 1, car* $4-3=1$. *Pour trouver une base de* $\mathrm{Ker}(A)$ *on regarde les variables libres. Ici il y a une seule variable libre,* x_4. *On pose* $x_4 = 0$ *et on résoud en partant de la forme échellonée :* $x_1 = 0, x_2 = -2, x3 = -1$. *Donc une base de* $\mathrm{Ker}(A)$ *est*

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Comment compléter la base de W ? Il manque exactement un vecteur. Un possiblité est d'essayer avec un vecteur de la base canonique, par exemple le dernier. (Celle ci n'est pas la méthode la plus rapide.) Est-ce que l'ensemble suivant est une base de $\mathbb{R}^4$ *?*

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

On refait les opération qu'on a fait sur A, où on a gardé les colonnes qui forme une base et on rajoute le quatrième vecteur de base canonique

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1&2&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Il y a 4 pivots, donc les 4 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Contrôle *Est-ce qu'on a bien répondu à toutes les questions ? (oui) Pourquoi* $\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}\, A = 4$ *? (...)*