Série 2, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 & h+11 \\ 2 & 14 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & -7 & 1 & \frac{2h^2-98}{5} & h-1 \end{array}\right),$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Donner l'ensemble des solutions selon le paramètre h.

Solution : Analyse :

- *Il y un paramètre dans la partie de droite du système linéaire.*
- *Le système n'est pas homogène.*
- *Il y a trois variable.*
- *La matrice augmentée a une taille de* 3×4.

Liste des outils :

- *Les 3 opérations sur les lignes ;*
- *L'algorithme de Gauss pour la mise en forme échéllonée (evtl réduite)*
- *Les notions de pivots et de variables libres et de base*
- *Un système peut être compatible ou incompatible. Dans le premier cas, soit l'ensemble des solution a une seule et unique solution, soit une infinité. Dans le deuxième, l'ensemble des solution est vide.*

Résolution

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 & h+11 \\ 2 & 14 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & -7 & 1 & \frac{2h^2-98}{5} & h-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ L_2+2L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 & h+11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & (6-2h-22) \\ 0 & 0 & 4 & \frac{2h^2-98}{5} & (h-1+h+11) \end{array}\right) \begin{array}{c} \to \\ \\ 5L_3+4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 & h+11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & (6-2h-22) \\ 0 & 0 & 0 & 2h^2-98 & (10h+50-8h-64) \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{-1}{5}L_2 \\ \to \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 0 & h+11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16+2h}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2h^2-98 & (10h+50-8h-64) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1-3L_2 \\ \to \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & h+11-3\frac{16+2h}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16+2h}{5} \\ 0 & 0 & 0 & h^2-49 & (h-7) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & \frac{7-h}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16+2h}{5} \\ 0 & 0 & 0 & (h-7)(h+7) & (h-7) \end{array}\right)$$

Si $h = 7$: le système est compatible, les variables libre sont x_2 et x_4 et les variables de base sont x_1 et x_3. La matrice échélonnée réduite devient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et les solutions : $s_2 = \alpha$, $s_4 = \beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s_3 = 6$, $s_1 = 0 - 7\alpha$. Plus précisement, l'ensemble des solutions est

$$S = \{(-7\alpha, \alpha, 6, \beta),\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Si $h = -7$: la dernière ligne est $[0\ 0\ 0\ 0| - 14]$, donc le le système est incompatible et l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

Si $h \neq \pm 7$: la matrice échélonnée réduite devient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & \frac{7-h}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16+2h}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/(1+h) \end{array}\right)$$

La variable libre est x_2 et les variables de base sont x_1, x_3 et et x_4. Le système est compatible et les solutions : $s_2 = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $s_3 = \frac{16+2h}{5}$, $s_1 = \frac{7-h}{5} - 7\alpha$, $s_4 = 1/(1+7)$. Plus précisement, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{(\frac{7-h}{5} - 7\alpha, \alpha, \frac{16+2h}{5},),\, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

***Contrôle** : Le contrôle peut se faire en remplaçant $h = 0$ et resoudre à nouveau, ou alors en prenant $h = 7$ et voir si les solutions données satisfont le système linéaire (au moins pour quelques solutions).*