

## Série 2 (Corrigé)

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. calculer la **forme échelonnée réduite** d'une matrice, avec la méthode de Gauss ;
2. déterminer les **variables liées** et **variables libres** ;
3. calculer les **solutions d'un SEL** à partir de la forme échelonnée réduite ;
4. exprimer un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  comme **combinaison linéaire** d'autres vecteurs, si possible.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- méthode d'élimination de Gauss
- variables liées (ou de base)
- variables libres (ou fondamentales)
- combinaison linéaire

### Exemple de passage de la forme échelonnée réduite à la solution générale

Forme échelonnée réduite (de la matrice augmentée) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\pi \end{pmatrix}$$

Le système est compatible, il y a une solution (au moins). Variables de bases :  $x_1, x_4, x_5$ . Variables libres :  $x_2, x_3$ . Il y a une infinité de solutions. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = -\pi \end{cases}$$

**Définition :** Si les coefficients  $b_1, \dots, b_m$  sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**, autrement qu'il est hétérogène. Un système homogène est toujours compatible car il a au moins la solution **triviale**  $(0, 0, \dots, 0)$ .

### Exercice 1

Pour chacun des systèmes suivants :

- 1) Écrire la matrice augmentée.

- 2) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.  
 3) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

**Solution :** Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de bases :  $x_1$  et  $x_2$ . Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

**Solution :** Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases :  $x_1, x_2, x_3$ . Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

**Solution :** Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déjà sous forme échelonnée réduite. Variables de bases :  $x_1, x_3, x_4$ . Variable libre :  $x_2$ . Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**Solution** : Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas de solution. Théoriquement, variable de base :  $x_1$ , variables libres :  $x_2, x_3$ .

e) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

**Solution** : Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases :  $x_1, x_4, x_5$ . Variables libres :  $x_2, x_3$ . Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = -1 \end{cases}$$

## Partiellement en classe mardi

### Exercice 2

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

**Solution :** Le système est carré (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer la relation de dépendance linéaire sur les lignes  $L_1 = L_2 + L_3$ , il existe donc une infinité de solutions.

On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa solution générale est

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 \end{cases}.$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre  $x_3 \neq 0$ ).

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

**Solution :** Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution triviale ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ).

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

**Solution :** Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois) et il est compatible, donc il existe une infinité de solutions.

### Exercice 3

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h - 4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 - h \end{pmatrix},$$

où  $h \in \mathbb{R}$  est un paramètre.

Discutez la taille de l'ensemble des solutions selon le paramètre  $h$ .

**Solution :**

Commençons par chercher une forme échelonnée de la matrice augmentée. En faisant  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$  puis  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ , on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h-4 \\ 0 & 0 & 0 & h-3 \end{pmatrix}$$

Ces deux étapes sont équivalentes à faire  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + 2L_1$

Ensuite, on échange  $L_1$  avec  $L_2$ , on obtient une forme échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2h-4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h-3 \end{pmatrix}$$

- si  $h - 3 = 0$ , alors le système est compatible et a une infinité de solutions ;
- si  $h - 3 \neq 0$ , alors le système est incompatible et l'ensemble des solutions est vide.

## Partiellement en classe jeudi

### Exercice 4

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = (1 \ 4).$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

- $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$
- $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

**Solution :**

$$a) AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, AC \text{ n'existe pas : } (2 \times 3) \times (2 \times 2), CA =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}, CB \text{ n'existe pas : } (2 \times 2) \times (3 \times 2), CD \text{ n'existe pas :}$$

$$(2 \times 2) \times (3 \times 1), EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$b) AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, BA^T \text{ n'existe pas : } (3 \times 2) \times (3 \times 2), BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}, BD^T \text{ n'existe pas : } (3 \times 2) \times (1 \times 3), D^T B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 5

- (a) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ . Trouver (si elle existe) une matrice  $B$  de taille  $2 \times 2$  non nulle telle que  $AB = 0$ . (Idée : écrire  $AB$  sous la forme  $(A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2)$ )

**Solution :** On note  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  les colonnes de  $B$  :  $B = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)$ . On a  $AB = (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi, on doit chercher un vecteur non nul  $\mathbf{b}_1$  tel que  $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ . Si un tel vecteur existe, on peut poser par exemple  $B = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)$  avec  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ . Sinon, une telle matrice  $B$  n'existe pas.

Soit  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Le système  $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$  est linéaire en  $x_1$  et  $x_2$  avec pour matrice augmentée  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ , dont la forme échelonnée réduite est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi, la solution générale est  $x_1 = -2x_2$ , c'est-à-dire, sous forme vectorielle  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$ . Ainsi, (en fixant  $x_2 = 1$ ) on trouve un vecteur  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  tel que  $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ . On peut donc proposer la matrice  $B = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (b) Même question pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Solution :** En résolvant  $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$  pour  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  on obtient un système linéaire avec pour matrice augmentée  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . La forme échelonnée réduite est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Par conséquent, le système a une unique solution triviale  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et la matrice  $B$  telle que  $AB = 0$  n'existe pas.

- (c) Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $k \in \mathbb{R}$  a-t-on  $AB = BA$ ?

**Solution :** On calcule  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 12 - 4k \\ -30 & -20 + k \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15 - 5k & -20 + k \end{pmatrix}$ .

L'équation  $AB = BA$  équivaut donc au système

$$\begin{cases} 12 - 4k = -24 \\ -30 = 15 - 5k, \end{cases}$$

avec pour unique solution  $k = 9$ .

(d) Trouver une matrice  $A$  non nulle telle que  $A^2 = 0$ .

**Solution :** Par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- (a) Une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices  $B$  de taille  $p \times m$ .
- (b) Le produit matriciel est commutatif.
- (c) Si le produit de deux matrices  $A$  et  $B$  est  $AB = 0$ , alors  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
- (d)  $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ .

**Solution :** Vrai : (a) Le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ . (d) On applique deux fois l'identité du cours :  $(ABC)^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T$

Faux : (b) Posons, par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Il est immédiat de calculer que  $A.B \neq B.A$ . (c) On calculera que  $B^2 = 0$ , alors que  $B$  (définie juste avant) n'est pas la matrice nulle.

### Exercice 7

Soient  $A$  et  $B$  des matrices telles que le produit  $AB$  soit bien défini. Montrer que  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**Solution :** Le produit  $AB$  est bien défini, le nombre  $m$  de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ . En transposant, le nombre de lignes de  $A^T$  est égal au nombre de colonnes de  $B^T$ , donc le produit  $B^T A^T$  est également bien défini. On note  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  et on compare les éléments d'indice  $ij$  des matrices  $(AB)^T$  et  $B^T A^T$  :

$$\left( (AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki},$$

$$\left( B^T A^T \right)_{ij} = \sum_{k=1}^m \left( B^T \right)_{ik} \left( A^T \right)_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk},$$

on obtient les mêmes quantités, ainsi  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.

Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.