

Série 2

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. calculer la **forme échelonnée réduite** d'une matrice, avec la méthode de Gauss;
2. déterminer les **variables liées** et **variables libres**;
3. calculer les **solutions d'un SEL** à partir de la forme échelonnée réduite;
4. exprimer un vecteur de \mathbb{R}^n comme **combinaison linéaire** d'autres vecteurs, si possible.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- méthode d'élimination de Gauss
- variables liées (ou de base)
- variables libres (ou fondamentales)
- combinaison linéaire

Exemple de passage de la forme échelonnée réduite à la solution générale

Forme échelonnée réduite (de la matrice augmentée) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\pi \end{pmatrix}$$

Le système est compatible, il y a une solution (au moins). Variables de bases : x_1, x_4, x_5 . Variables libres : x_2, x_3 . Il y a une infinité de solutions. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = -\pi \end{cases}$$

Définition : Si les coefficients b_1, \dots, b_m sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**, autrement qu'il est hétérogène. Un système homogène est toujours compatible car il a au moins la solution **triviale** $(0, 0, \dots, 0)$.

Exercice 1

Pour chacun des systèmes suivants :

- 1) Écrire la matrice augmentée.

2) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

3) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Partiellement en classe mardi

Exercice 2

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h-4 \\ -1 & -1 & 2 & -3-h \end{array} \right),$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Discutez la taille de l'ensemble des solutions selon le paramètre h .

Partiellement en classe jeudi

Exercice 4

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$

b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Exercice 5

- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (*Idée : écrire AB sous la forme $(A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2)$*)
- (b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- (c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?
- (d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- (a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.
- (b) Le produit matriciel est commutatif.
- (c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- (d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Exercice 7

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.