Capsule 03

Compréhension de preuves

Comment lire une preuve?

Self-explanation

- Après lire chaque <u>ligne</u> d'une preuve,
  - Essayez d'**identifier et préciser les idées principales** de la preuve.
  - Essayez d'**expliquer chaque ligne en terme des idées précédentes** seulement.
  - Réfléchissez aux **questions qui émergent** si la nouvelle information contredit votre compréhension actuelle.
- Avant de continuer à la ligne suivante, répondez aux questions suivantes:
  - Est-ce que je comprends les idées dans cette ligne?
  - Est-ce que je comprends **pourquoi ces idées ont été utilisées**?
  - Comment est-ce que **ces idées sont liées** à d'autres idées dans la preuve, à d'autres théorèmes, ou aux autres connaissances que j'ai?
  - Est-ce que l'auto-explication que j'ai produite aide à répondre à ces questions?

Un exemple

Self-explanation

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1} I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

Dans cette preuve on montre chaque direction de l'équivalence
- A inversible => Ax = 0 possède seulement la solution triviale
- Si Ax = 0 possède seulement la solution triviale => A inversible

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène Ax = 0 possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => Ax = 0 possède une solution unique

<= Supposons que le système Ax = 0 possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1} I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

On sait que lorsque A est inversible, tout système $Ax = b$ a une solution unique. La preuve suggère qu'on a choisi $b = 0$, et cela reste vrai!

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1} I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

Pour prouver l'autre direction, il faut prendre pour acquis que le système $Ax = 0$ a une solution unique.

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\ I_n$$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

On utilise le fait que lorsque $Ax = b$ a une solution unique, la FER doit avoir un pivot dans chaque colonne (n colonnes : n pivots)

<u>Théorème</u> (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

<u>Preuve</u> Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$\cdots$$

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\ I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

La preuve utilise le fait que la matrice A est carrée (nxn) et donc que sa FER l'est aussi (nxn). Et puisqu'elle a un pivot dans chaque colonne, on conclut

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\, I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple
Self-explanation

Mais on sait qu'on peut trouver la FER d'une matrice simplement en utilisant des opérations élémentaires (ce qui équivaut à multiplier A par des matrices élémentaires)

<u>Théorème</u> (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

<u>Preuve</u> Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$\cdots$$

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\ I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

Donc I_n est égale à une suite d'opérations élémentaires multipliées par A

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

...

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1} I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

On peut donc multiplier des deux côtés de l'égalité par l'inverse de la matrice la plus à gauche (!! Pas commutatif!)…

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_t^{-1} \cdot E_t \, E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

…

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1} \, I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

… successivement, jusqu'à isoler A

<u>Théorème</u> (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

<u>Preuve</u> Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

…

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\ I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Un exemple

Self-explanation

La preuve utilise le fait que le produit de matrices inversibles est une matrice inversible.

Théorème (premier critère d'inversibilité d'une matrice) Soit $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si le système homogène $Ax = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

Preuve Déjà vu que A inversible => $Ax = 0$ possède une solution unique

<= Supposons que le système $Ax = 0$ possède une solution unique => Dans une forme échelonnée de la matrice A il y a n pivots => La forme échelonnée réduite de A est la matrice I_n.

Il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \cdots, E_t$ telle que

$$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

$$E_{t-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{t-1}^{-1} \cdot E_t^{-1} \cdot I_n$$

$$\ldots$$

$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \cdots \cdot E_t^{-1}\, I_n$ <— A est un produit de matrices inversibles

Attention

Ce qui ne compte <u>pas</u> comme self-explanation

- <u>Paraphraser</u>: '$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$'
  - "Donc I_n est égale au produit de E_t, …, E_1 et A"
- <u>Se surveiller</u>: '$E_t \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$'
  - "OK je comprends pourquoi '$E_t \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$'
  - AE: "OK, donc pour obtenir la forme échelonnée de A (qui est I_n) on applique une succession d'opérations élémentaires, qui équivaut à multiplier A à gauche par des matrices élémentaires une à une.

Résumé

Sem.	Sujet	Tâche	Livre AAE	MOOC AAE	LC
1	Prise de notes & Auto-évaluation	Essayer la méthode Cornell; s'auto-évaluer pendant la séance d'exos	Chap. 1	Chap. 1	Quiz 1 + 3
2	Attention & Env. de travail	Optimisez votre attention			
3	Compréhension de preuves	Utilisez le self-explanation pour les preuves de cette semaine.			
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					