EPFL

**Ens: S. Deparis**
**Algèbre linéaire - (n/a)**
**20 novembre 2025**
**Durée : 60 minutes**

# BLANK

# SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

## Notations

– Pour une matrice $A$, $a_{ij}$ désigne l'élément situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$ de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $x_i$ désigne la $i$-ème composante de $\vec{x}$.
– $I_m$ désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Im}(T)$.
☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Ker}(T)$.
☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$ et dans $\mathrm{Ker}(T)$.
☐ le vecteur $\vec{v}$ n'est ni dans $\mathrm{Ker}(T)$, ni dans $\mathrm{Im}(T)$.

**Question 2 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐ $x_4 = \frac{1}{2}$. ☐ $x_4 = -2$. ☐ $x_4 = 1$. ☐ $x_4 = -\frac{5}{2}$.

**Question 3 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice $A$ est tel que

☐ $b_{22} = 1$. ☐ $b_{21} = 7$. ☐ $b_{23} = 5$. ☐ $b_{24} = 3$.

**Question 4 :** Soit $W$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $2\times 2$. La deuxième coordonnée de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in W$ dans la base ordonnée $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ de $W$ est

☐ $1$. ☐ $-2$. ☐ $-\frac{3}{4}$. ☐ $\frac{1}{4}$.

**Question 5 :** Soit $a$ un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a\,x_1 \quad + \quad x_3 = 1 \\ a\,x_2 \quad + \quad x_4 = 0 \\ x_1 + a\,x_3 = 1 \\ x_2 + a\,x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

- [ ] $a \in \{-1, 1, -2\}$.
- [ ] $a \in \{-1, 1\}$.
- [ ] $a \in \{-2, 1\}$.
- [ ] $a = -2$.

**Question 6 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- [ ] $\det(B) = \alpha^2(\alpha-1)^2$.
- [ ] $\det(B) = \alpha(\alpha+1)(\alpha^2-4)$.
- [ ] $\det(B) = \alpha(\alpha+2)(\alpha-1)^2$.
- [ ] $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2-4)$.

**Question 7 :** Soit $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = b_{12} - (b_{11}+b_{22})t + b_{21}t^2\,.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{1,\, 1+t^2,\, t+t^2\right\}$$

des bases ordonnées de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ respectivement. La matrice $A$ associée à $T$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, telle que $\big[T(B)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[B\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, satisfait

- [ ] $a_{12} = -6$.
- [ ] $a_{12} = 2$.
- [ ] $a_{12} = 3$.
- [ ] $a_{12} = -4$.

**Question 8 :** Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ la base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2\,, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3\,.$$

Soit $P$ la matrice de changement de base telle que $\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{C}} = P\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors

- [ ] $p_{23} = 2$.
- [ ] $p_{23} = -\frac{2}{3}$.
- [ ] $p_{23} = 0$.
- [ ] $p_{23} = 1$.

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9 :** Soient $A$ et $B$ deux matrices de taille $3\times3$. Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2}\det(B)^2 .$$

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 10 :** Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 11 :** Si $A$ est une matrice de taille $m\times n$ telle que $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 12 :** Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels et soient $T$, $S\colon V \to W$ deux applications linéaires. Si $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 13 :** L'ensemble

$$\big\{p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid p(1)\,p(2) = 0\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 14 :** Soit $V$ un espace vectoriel et soit $T\colon V \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Si $v_1$, $v_2$, $v_3 \in V$ sont tels que

$$T(v_1) = 2\,, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1\,,$$

alors $v_1 - v_2 + v_3$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 15 :** Soit $V$ un espace vectoriel et soient $v_1$, $v_2$, $v_3$ trois vecteurs de $V$. Si l'ensemble $\{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{v_1 - v_2\,,\, v_1 - v_3\,,\, v_2 - v_3\}$ est linéairement indépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 16 :** Soient $A$ une matrice de taille $m\times n$ et $B$ une matrice de taille $n\times m$. Si $AB$ est inversible, alors $A$ et $B$ sont inversibles.

☐ VRAI ☐ FAUX