

# Algèbre linéaire

## SVD

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 14



## Séance de Q&A en janvier

L'examen aura lieu lundi 20 janvier. Quand aimeriez vous avoir une séance de Q&A ?

A. Mercredi 15 janvier 16h15-18h00.

B. Vendredi 17 janvier 14h15-16h00.

Il faudra soumettre les questions 24 heures avant sur Ed. Je ne répondrai pas à d'autres questions !

Évaluation du cours : à la fin de l'examen sur papier.

## Calculs à savoir faire :

- 1 Calculer avec des matrices symétriques et orthogonales.
- 2 Diagonaliser orthogonalement une matrice symétrique.
- 3 Calculer les valeurs singulières d'une matrice donnée.
- 4 Calculer la SVD d'une matrice donnée.

## 10.10 Valeurs singulières I

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ .

On appelle *valeurs singulières* de  $A$  les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $A^T A$ .

On les note  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , de telle sorte que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

Ainsi, il existe une base  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  composée de vecteurs propres de  $A^T A$  avec valeurs propres correspondantes  $\sigma_1^2 = \lambda_1 \geq \sigma_2^2 = \lambda_2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 = \lambda_n \geq 0$ .

## 10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental

### Théorème

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  les *valeurs singulières* de  $A$ .

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A^T A$  associés aux valeurs propres  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ .

Supposons que  $A$  admette  $r$  valeurs singulières non-nulles. Alors

- $(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r)$  est une base orthogonale de  $\text{Col}(A)$ .
- $\text{rang}(A) = r$ .
- $(\frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A\vec{v}_r}{\sigma_r})$  est une base orthonormée de  $\text{Col}(A)$ .

## 10.12 Décomposition en valeurs singulières I

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . On cherche des matrices

- $U$  orthogonale  $m \times m$ ,
- $V$  orthogonale  $n \times n$  et
- $\Sigma$  diagonale, avec sur la diagonale les *valeurs singulières* de  $A$   
 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ ,

telles que  $A = U\Sigma V^T$ .

On appelle ceci la *Décomposition en valeurs singulières* de  $A$ .

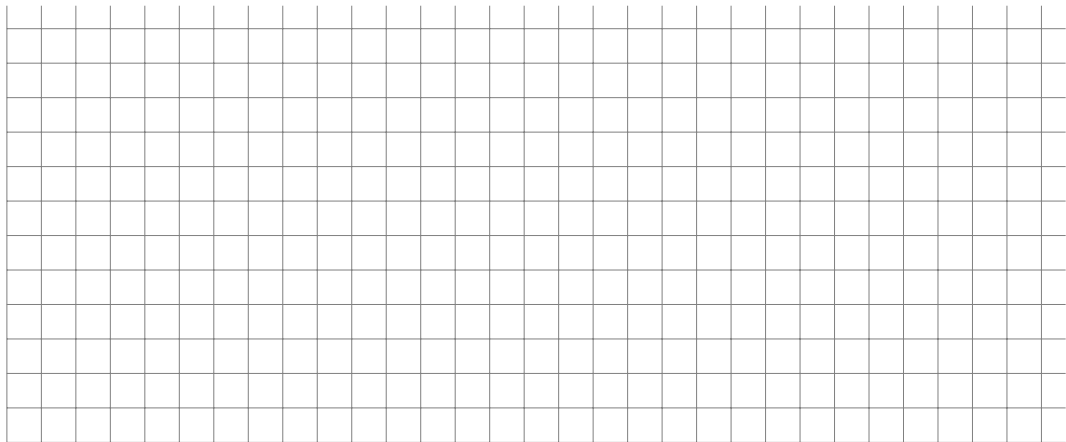
## 10.13 Décomposition en valeurs singulières, méthode

- Diagonaliser  $A^T A$  en base orthonormée :  $A^T A = P D P^T$  avec
  - les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  sur la diagonale de  $D$ ,
  - $P$  orthogonale : ses colonnes  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont orthonormées ;
- Définir  $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$  pour  $k = 1, \dots, n$ , ainsi qu'identifier le plus grand  $r$  tel que  $\sigma_r > 0$  ;
- Définir  $\Sigma$  comme matrice  $m \times n$  avec les valeurs  $\sigma_k$  en position  $(k, k)$ , pour  $k = 1, \dots, r$ , et 0 ailleurs ;
- $(\frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A\vec{v}_r}{\sigma_r}) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$  est une base orthonormée de  $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$ . Compléter cette base afin d'avoir une base  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$  orthonormée de  $\mathbb{R}^m$ .
- Définir  $V = P$  et  $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m)$ .

## Serie 14, Ex 7

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



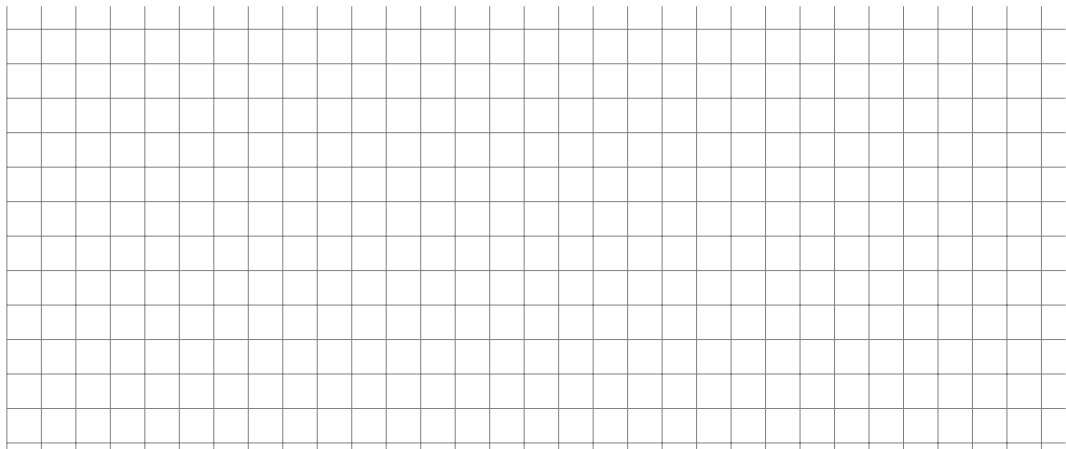
# Serie 14, Ex 7, solution

## Serie 14, Ex 8

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite en calculer une décomposition en valeurs singulières.

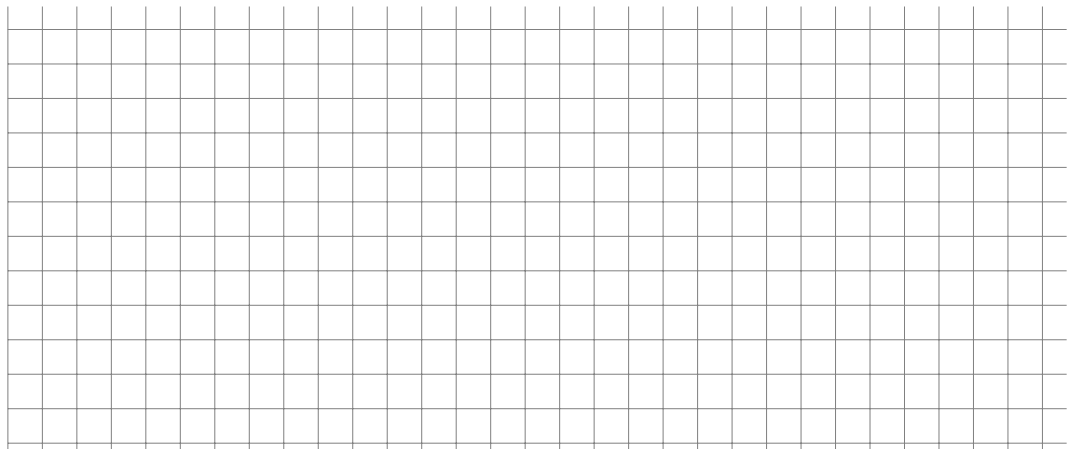


# Serie 14, Ex 8, solution

## Serie 14, Ex 9

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

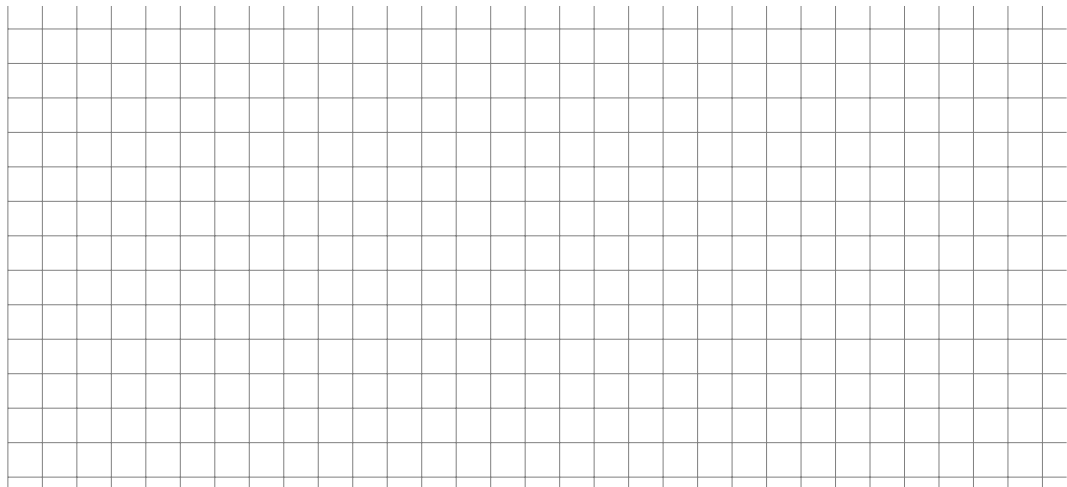


# Serie 14, Ex 9, solution

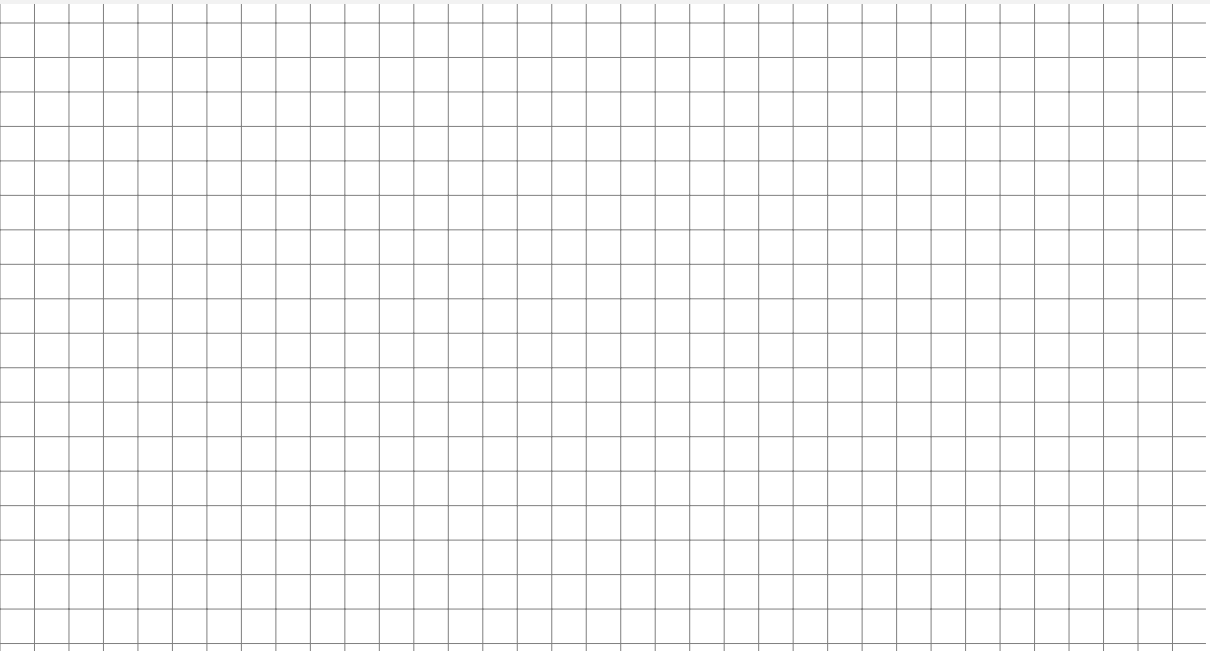
## Serie 14, Ex 10

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



# Serie 14, Ex 10, solution



## Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) I

Soit  $A$  une matrice et soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  deux vecteurs propres de la matrice  $A^T A$ , tels que

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices  $U, \Sigma$  et  $V$  telles que  $A$  possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

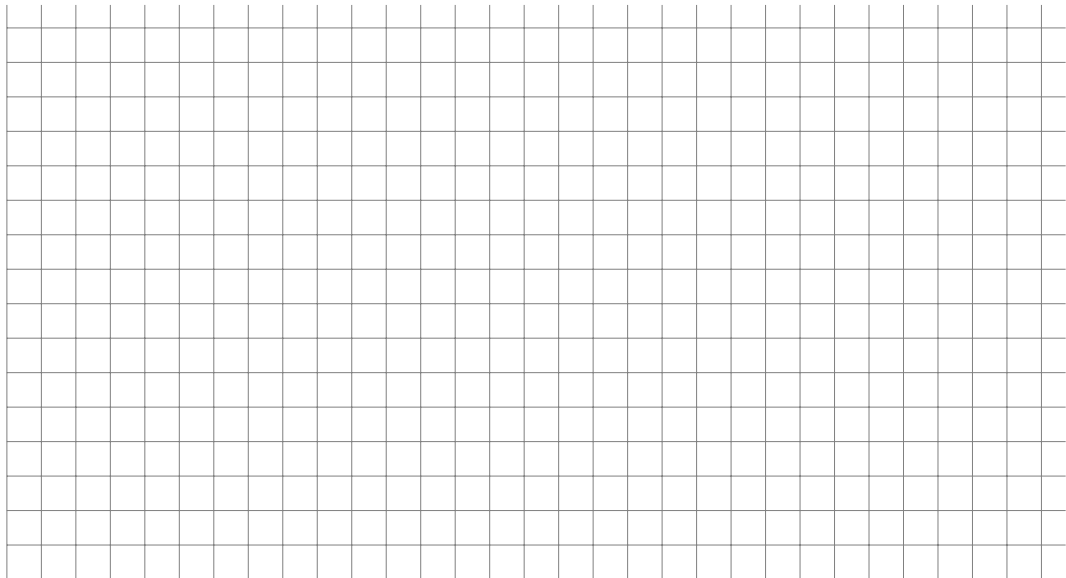
*Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :*

- d'abord déduisez le tailles des matrices  $A, U, \Sigma$  et  $V$  ;

## Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) II

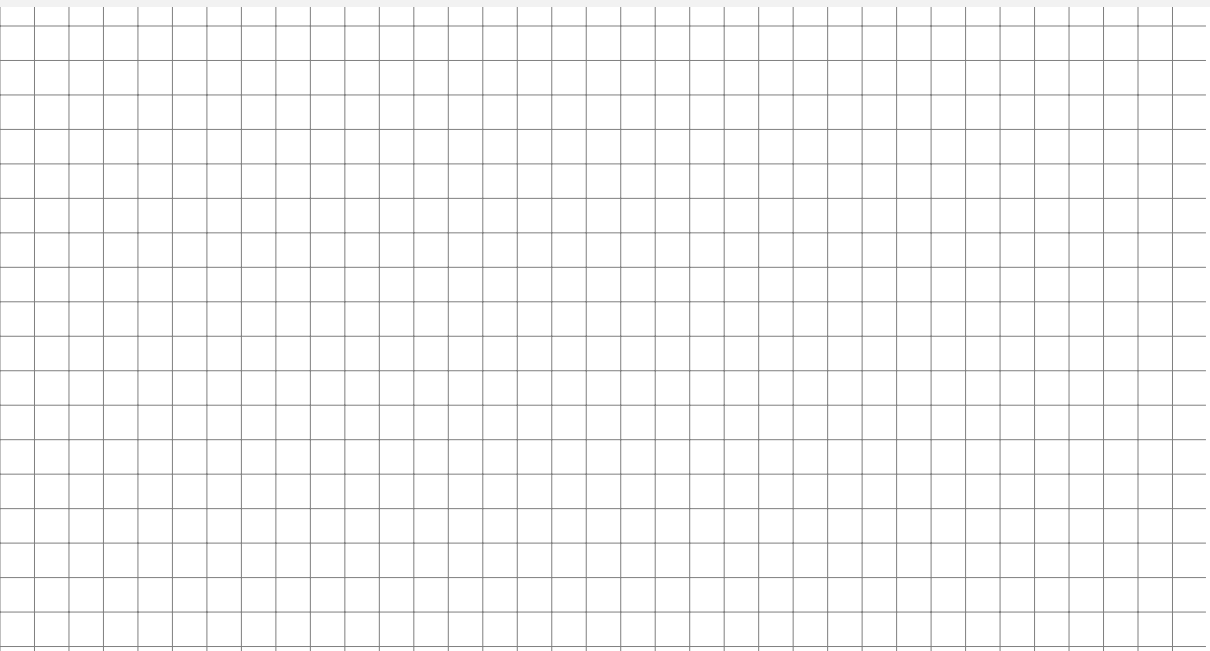
- normalisez les vecteurs  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$ , on obtient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ;
- calculez  $A\vec{v}_1$  et  $A\vec{v}_2$  ;
- calculez les valeurs singulières et définissez  $\Sigma$  ;
- complétez  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  en une base de  $\mathbb{R}^4$  et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez  $V$  en utilisant  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  ;
- normalisez  $A\vec{v}_1$  et  $A\vec{v}_2$  et utilisez-les pour définir  $U$ .

# Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) III



# Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) IV

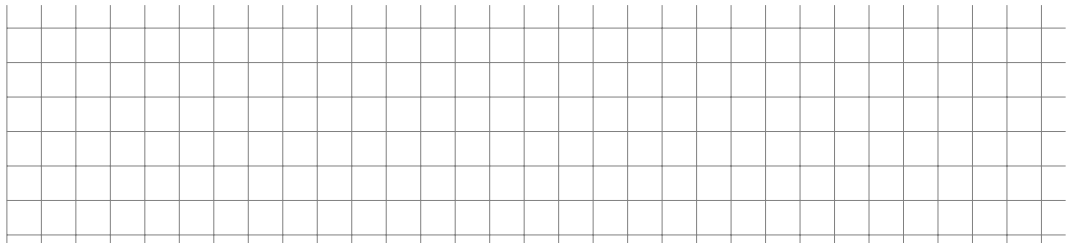
# Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024), solution



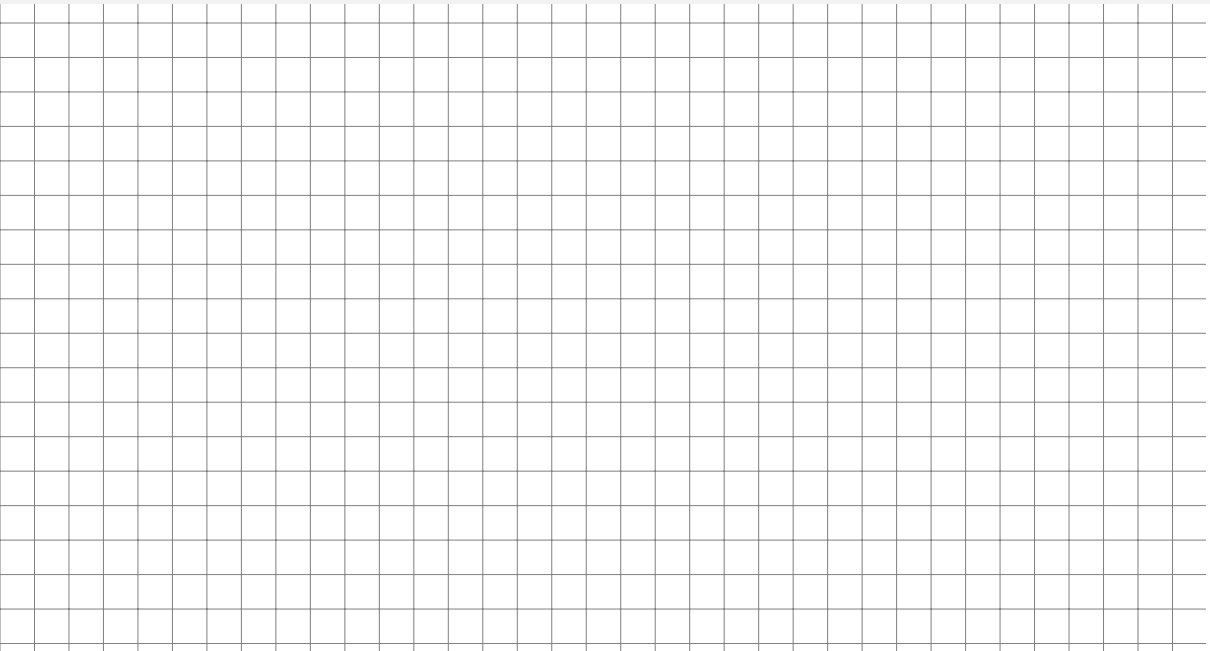
## Serie 14, Ex 12

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- 1 Soit  $A$  une matrice. Alors  $AA^T$  et  $A^T A$  ont les mêmes valeurs singulières.
- 2 Une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur singulière de  $A$ .
- 3 Soit  $A$  une matrice carrée. Alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont aussi des valeurs singulières de  $A$ .
- 4 Soit  $A$  une matrice et soit  $A = U\Sigma V^T$  une SVD de  $A$ . Alors  $V\Sigma U^T$  est une SVD de  $A^T$ .
- 5 Soit  $A$  une matrice de taille  $3 \times 3$  avec valeurs singulières 1, 3 et 5. Alors le déterminant de  $A$  est 15.



# Serie 14, Ex 12, solution



## Devoirs pour jeudi :

- Réviser le matériel des chapitres 5-7.
- Faire la partie commune de l'examen de 2016 (144 minutes).
- Indiquer sur le questionnaire de Moodle quelle partie du cours vous pose encore des difficultés.

# Algèbre linéaire

## Revisions

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 14



- environ 55-60% QCM
- environ 15-20% vrai/faux
- environ 20-30% questions ouvertes (avec des petites preuves à faire, et/ou des questions calculatoires)

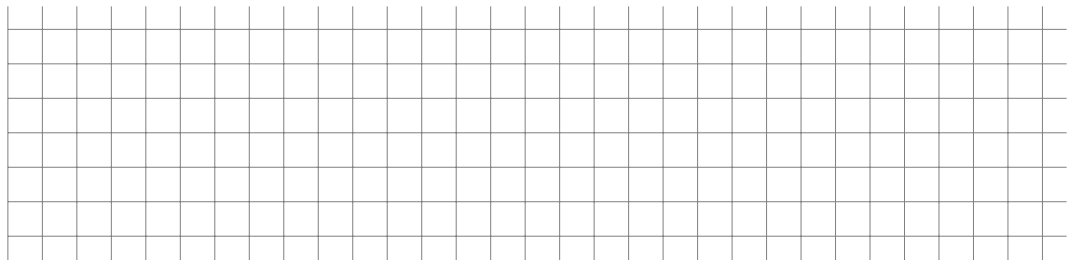
## Exercice 1

Pour quels nombres réels  $b$  est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0 ?

- 0 et 1
- aucun
- 0 et  $-1$
- $-1$  et 1



# Exercise 1, solution

## Exercice 2

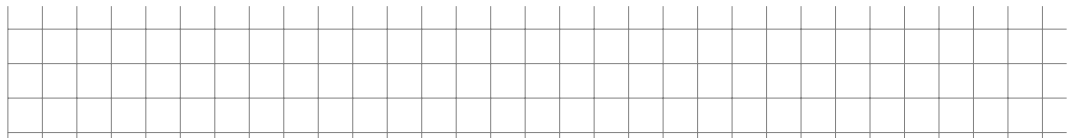
On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille  $3 \times 3$  de la forme

$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$  où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Soit  $h$  un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- si et seulement si  $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$  et  $h \neq 1/2$ .
- si et seulement si  $h \neq 1/2$  et  $h \neq 1/3$ .
- pour toute valeur réelle de  $h$ .
- si et seulement si  $h \neq 2$  et  $h \neq -2$ .



## Exercise 2, solution

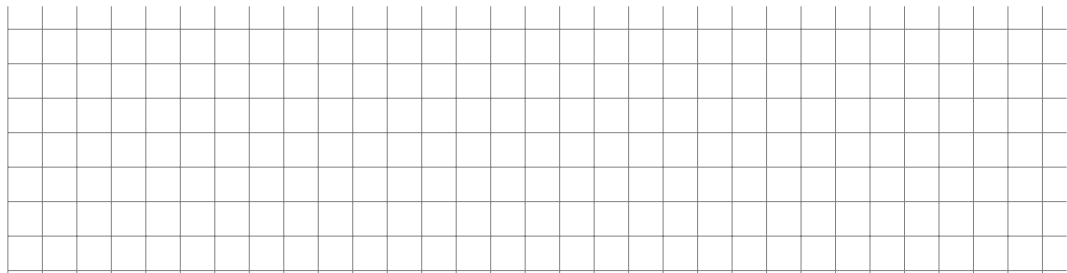
## Exercise 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $B = A^{-1}$ , alors l'élément  $b_{12}$  de  $B$  est égal à

- $-\frac{2}{3}$ .
- $\frac{1}{9}$ .
- $-\frac{1}{9}$ .
- $\frac{1}{3}$ .



## Exercise 3, solution

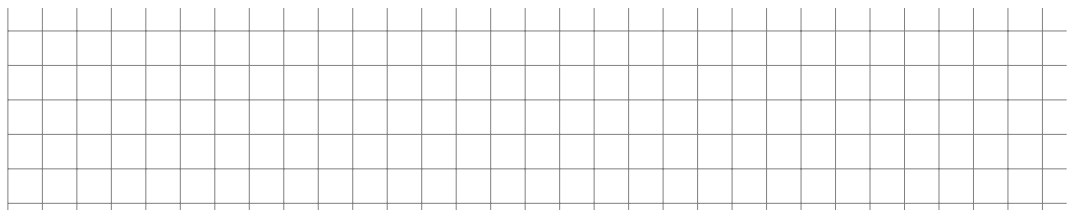
## Exercise 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si  $A = LU$  est une factorisation  $LU$  de  $A$  ( $L$  est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et  $U$  est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément  $l_{32}$  de  $L$  est

- $1/2$ .
- $-3/2$ .
- $3/2$ .
- $3$ .



## Exercise 4, solution

## Exercise 5

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors la solution au sens des moindres

carrés  $\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  satisfait

- $\hat{x}_2 = -35/6.$
- $\hat{x}_2 = 41/6.$
- $\hat{x}_2 = -5/6.$
- $\hat{x}_2 = 1/6.$



## Exercise 5, solution

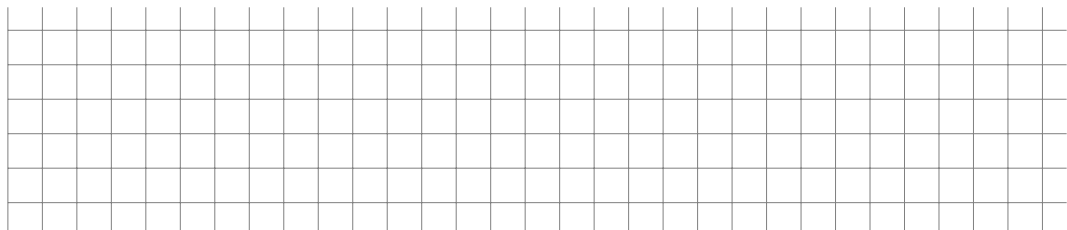
## Exercise 6

La dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

- 4.
- 3.
- 1.
- 2.



## Exercise 6, solution

## Exercice 7

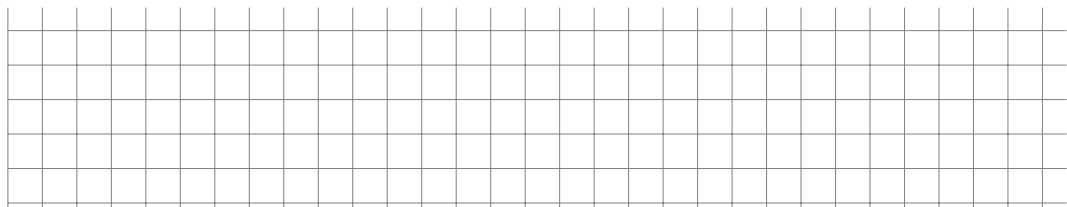
Soit  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$  l'application linéaire définie par  $T(p(t)) = (t+1)p(t)$ . Alors la matrice de  $T$  dans les bases  $\{1, t, t^2\}$  de  $\mathbb{P}_2$  et  $\{1, t, t^2, t^3\}$  de  $\mathbb{P}_3$  est

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## Exercise 7, solution

## Exercice 8

Soient l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur  $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$  sur  $V$  est

$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}.$

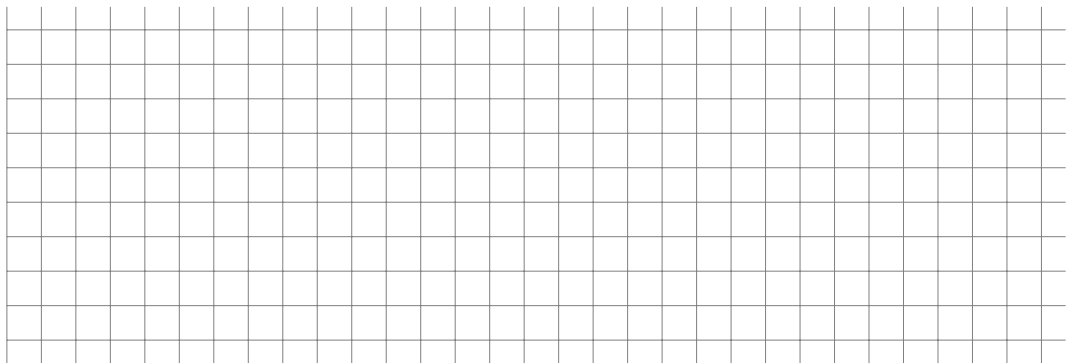
$\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}.$

## Exercise 8, solution

## Exercice 9

Soit un paramètre  $b \in \mathbb{R}$ . Alors le polynôme  $q(t) = bt - t^2$  appartient au sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_2$  engendré par  $p_1(t) = 1 + t + t^2$  et  $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$  lorsque

- $b = 1.$
- $b = -1.$
- $b = -3.$
- $b = 3.$



## Exercise 9, solution

## Exercise 10

Soient

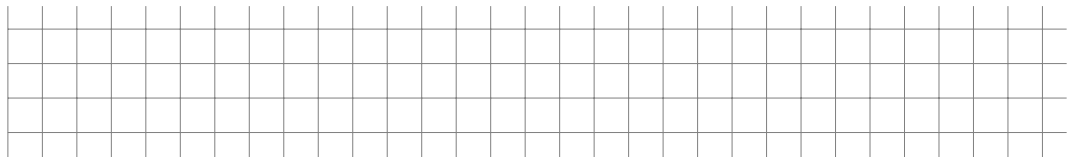
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où  $h \in \mathbb{R}$  est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une infinité de solutions

- pour  $h = -2, h = 0$  et  $h = 2$ .
- pour  $h = -2, h = 1$  et  $h = 2$ .
- pour  $h = -1, h = 0$  et  $h = 1$ .
- pour  $h = -1, h = -1/2$  et  $h = 1/2$ .



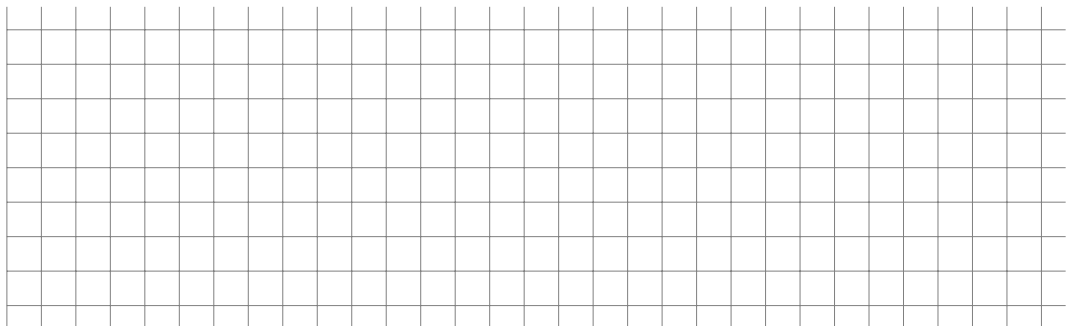
# Exercise 10, solution

## Exercise 11

Soit  $A$  une matrice de taille  $4 \times 5$  telle que l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{0}$  possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est compatible} \right\} ?$$

- 0
- 1
- 2
- 3



## Exercise 11, solution

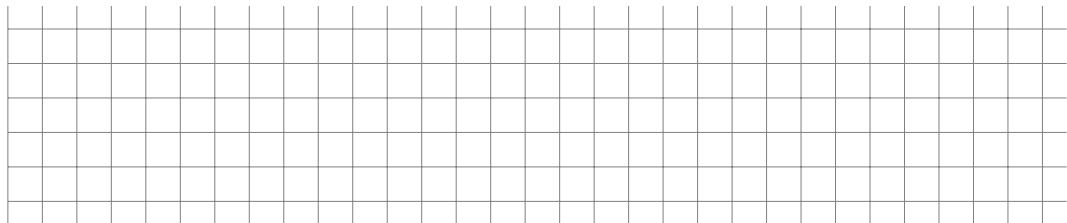
## Exercise 12

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- $\dim(\text{Ker } A) = 2$  et  $\dim(\text{Ker } B) = 2$ .
- $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$  et  $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$ .
- $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$  et  $\dim(\text{Ker } B) = 2$ .
- $\dim(\text{Ker } A) = 2$  et  $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$ .



## Exercise 12, solution

## Exercise 13

Soit  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de  $T$  dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

## Exercise 13, solution

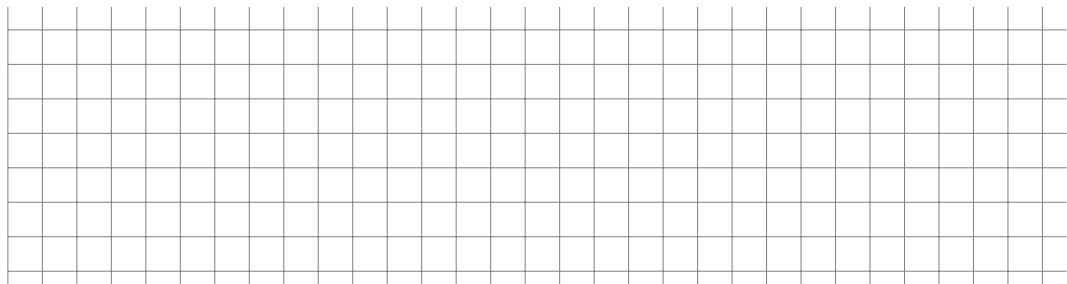
## Exercice 14

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de  $A$  sont

- $-2$  et  $3$ .
- $3$  et  $4$ .
- $-5$ ,  $-1$  et  $1$ .
- $-2$  et  $7$ .

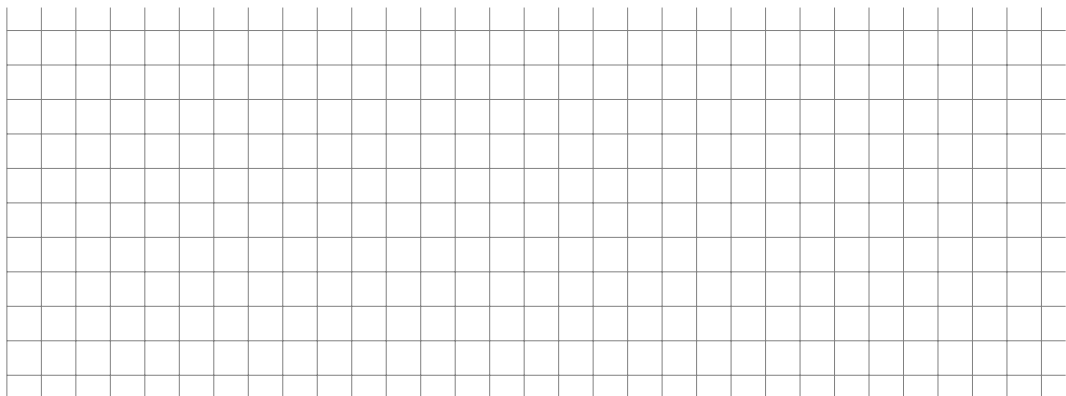


## Exercise 14, solution

## Exercise 15

Quel énoncé est vrai pour toute matrice  $A$  de taille  $n \times n$  et tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  ?

- L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au plus une solution.
- L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au moins une solution.
- L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au moins une solution au sens des moindres carrés.

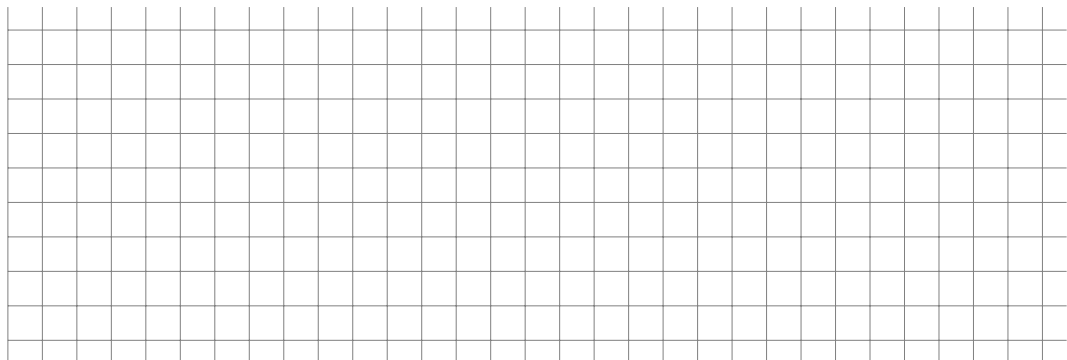


## Exercise 15, solution

## Exercise 16

Soit  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_4$  une application linéaire. Si le rang de  $T$  est égal à 4, alors l'ensemble  $\{T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), T(2\vec{e}_2), T(\vec{e}_3 + \vec{e}_4), T(\vec{e}_4 + \vec{e}_1)\}$

- est une base de  $\mathbb{P}_4$ .
- n'est pas linéairement indépendante.
- ne peut pas être complétée en une base de  $\mathbb{P}_4$ .
- peut être complétée en une base de  $\mathbb{P}_4$ .



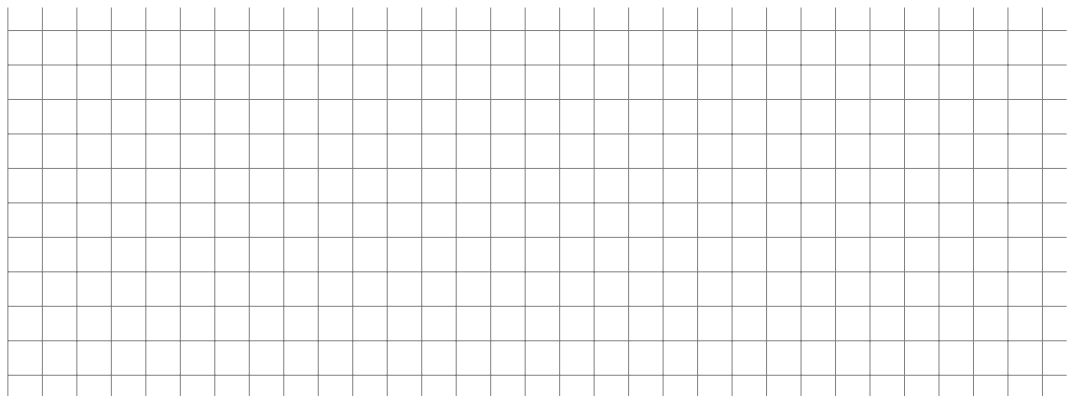
## Exercise 16, solution

## Exercise 17

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices diagonalisables de taille  $n \times n$  telles que  $A \neq B$ .

Alors

- $AB$  est toujours diagonalisable.
- $AB$  n'est jamais diagonalisable.
- $AB$  est diagonalisable si  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.
- $AB$  est diagonalisable si  $A$  et  $B$  ont les mêmes vecteurs propres.

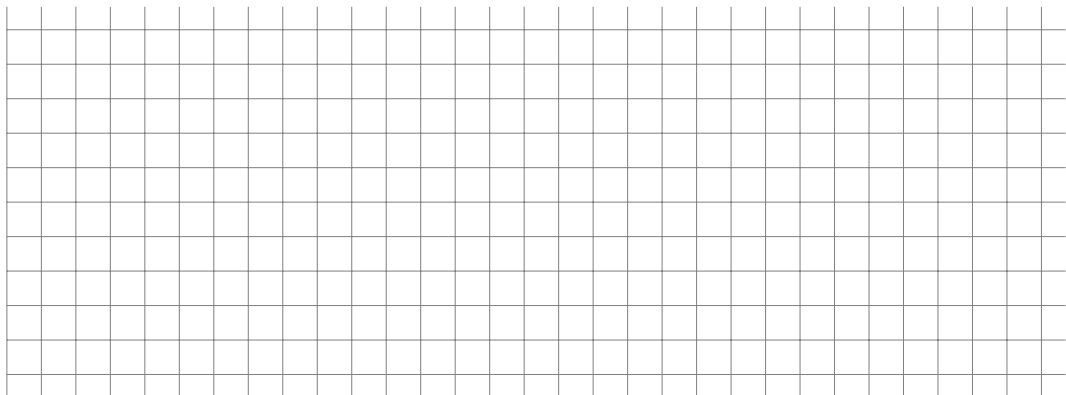


## Exercise 17, solution

## Exercise 18

Soient  $m \geq 2$ ,  $A$  une matrice de taille  $m \times (m - 1)$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de  $A\vec{x} = \vec{b}$  peut être

- l'ensemble vide.
- un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{m-1}$  de dimension 1.
- un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{m-1}$  de dimension  $m - 2$ .
- égal à  $\mathbb{R}^{m-1}$ .



## Exercise 18, solution

## Exercise 19

Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles  $A$  et  $B$  de taille  $n \times n$  ?

- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$



# Exercise 19, solution

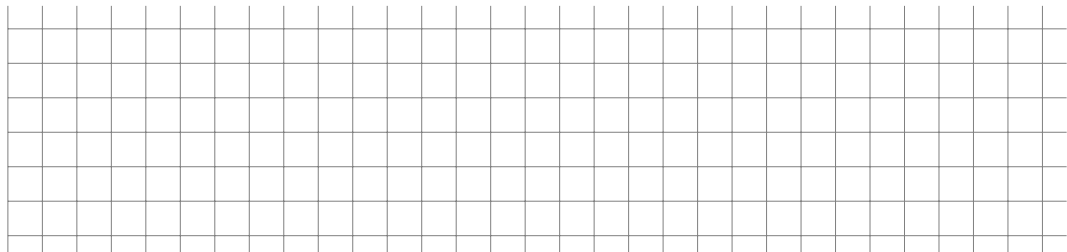
## Exercice 20

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ . Parmi les affirmations

(a)  $\det A = 1$       (b)  $AA^T = I_3$       (c)  $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies ?

- seulement (a) et (c)
- seulement (b)
- seulement (a) et (b)
- (a), (b) et (c)

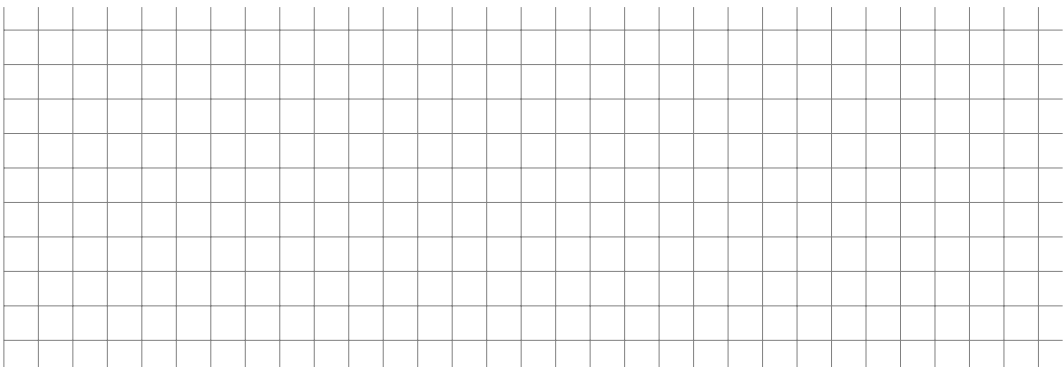


## Exercise 20, solution

## Exercise 21

Soient  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a + b = 1$  et  $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$  une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- le polynôme caractéristique de  $A$  a une seule racine réelle
- $\det A = -4$
- $A$  est une matrice de changement de base
- le polynôme caractéristique de  $A$  a deux racines réelles distinctes

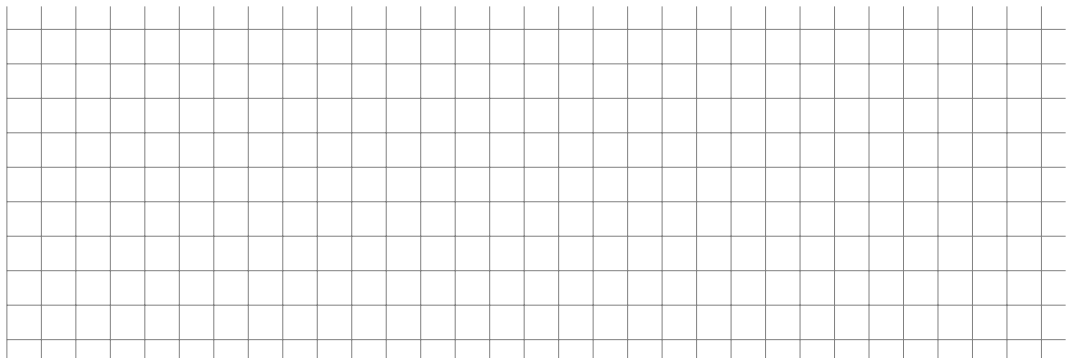


## Exercise 21, solution

## Exercise 22

Soit  $U$  une matrice de taille  $n \times p$  dont les colonnes sont orthonormées et soit  $W = \text{Col}(U)$ . Soit  $\text{proj}_W$  la projection orthogonale sur  $W$ . Alors, pour tout vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$  et tout vecteur  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , on a

- $U^T U \vec{x} = \vec{x}$             et     $U U^T \vec{y} = \vec{0}$ .
- $U^T U \vec{x} = \text{proj}_W \vec{x}$     et     $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$ .
- $U^T U \vec{x} = \vec{x}$             et     $U U^T \vec{y} = \vec{y}$ .
- $U^T U \vec{x} = \vec{x}$             et     $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$ .



## Exercise 22, solution

## Exercise 23

Soient les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  suivants :

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$$

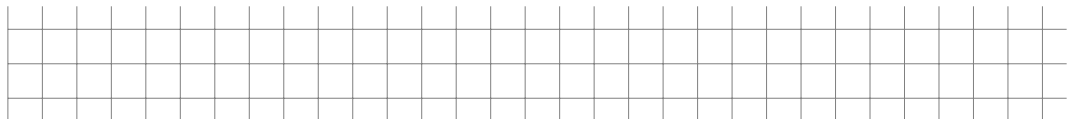
$$(c) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(d) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(e) \left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- tous sauf (d)
- tous sauf (b)
- seulement (c) et (e)
- seulement (a), (c) et (e)



## Exercise 23, solution

## Exercise 24

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $n \times n$  semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai ?

- Les polynômes caractéristiques de  $A$  et de  $B$  sont les mêmes.
- $A$  est diagonalisable si et seulement si  $B$  est diagonalisable.
- Les rangs de  $A$  et de  $B$  sont les mêmes.
- $A$  et  $B$  ont les mêmes sous-espaces propres.



## Exercise 24, solution

## Question 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouvez une base de  $\text{Col}(A)$ , de  $\text{ker}(A)$  et de  $\text{Lgn}(A)$ .

## Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

## Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Merci beaucoup pour le semestre et bonnes fêtes !!