Algèbre linéaire
Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 12

Série 12, Ex 11

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.

Série 12, Ex 11, solution

Série 12, Ex 12

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire euclidien) de v sur W est

[A.] $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ [B.] $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ [C.] $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$ [D.] $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Série 12, Ex 12, solution

9.12 Solution au sens des moindres carrés

Définition

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Aussi, désignons par $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à A. Une solution du système $AX = b$ *au sens des moindres carrés* est une solution du système

$$AX = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\phi)} b.$$

Théorème

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Alors une solution du système $AX = b$ au sens des moindres carrés est une solution du système $A^T AX = A^T b$.

Série 12, Ex 13

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-1,3),(1,0),(0,3)$.
Par où passe cette droite en $x=-1,1$ et 0 ?

Série 12, Ex 13, solution

Série 12, Ex 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

[A.] $\hat{x}_2 = 1/6$ [B.] $\hat{x}_2 = -35/6$ [C.] $\hat{x}_2 = 41/6$ [D.] $\hat{x}_2 = -5/6$

Série 12, Ex 14, solution

Série 12, Ex 15

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution
B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrées
C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.
D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrées.

Série 12, Ex 15, solution

Série 12, Ex 16

Soit $u_1, \ldots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.

Série 12, Ex 16, solution

Série 12, Ex 17

Soient A une matrice de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $c = \text{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(b)$. Alors, il es toujours vrai que

A. la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ est $A^{-1}c$.

B. l'équation $Ax = b$ n'admet aucune solution

C. toute solution de $Ax = c$ est une solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$

D. l'équation $Ax = c$ possède une solution unique.

Série 12, Ex 17, solution

Série 12, Ex 18

Quelle équation correspond à la droite de régression par les points $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$?

A. $y = 0.9 + 0.4x$

B. $y = 1 + 0.5x$

C. $y = 18 + 4x$

D. $y = 1.1 + 0.6x$

Série 12, Ex 18, solution

Série 12, Ex 19

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, on a

A. $U^T U x = \text{proj}_W(x)$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$
B. $U^T U x = x$ et $UU^T y = 0$
C. $U^T U x = x$ et $UU^T y = y$
D. $U^T U x = x$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$.

Série 12, Ex 19, solution

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 9.13 - 9.14 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 9.15 : faire quelques exercices en ligne.

Algèbre linéaire
Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 12

9.13 La factorisation QR : définition

Définition

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Alors il existe une factorisation du type $A = QR$, où

- Q est une matrice $m \times n$ dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace colonnes de A
- R est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure, inversible, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Soit A une matrice $m \times n$ avec colonnes $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linéairement indépendante.

Procédé de Gram-Schmidt | Normalisation

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{a}_1, & \vec{w}_1 &= \vec{v}_1/||\vec{v}_1|| \\
\vec{v}_2 &= \vec{a}_2 - (\vec{w}_1 \cdot \vec{a}_2)\,\vec{w}_1, & \vec{w}_2 &= \vec{v}_2/||\vec{v}_2|| \\
\vec{v}_3 &= \vec{a}_3 - (\vec{w}_1 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{w}_1 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{w}_2, & \vec{w}_3 &= \vec{v}_3/||\vec{v}_3|| \\
&\vdots \\
\vec{v}_n &= \vec{a}_n - \cdots - (\vec{w}_{n-1} \cdot \vec{a}_k)\,\vec{w}_{n-1}, & \vec{w}_n &= \vec{w}_n/||\vec{v}_n||
\end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \cdots \vec{w}_n \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ||\vec{v}_1|| & \vec{w}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{w}_1 \cdot \vec{a}_n \\ 0 & ||\vec{v}_2|| & \vec{w}_2 \cdot \vec{a}_3 & \cdots \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & ||\vec{v}_n|| \end{pmatrix}$$

9.14 La factorisation QR : application à la résolution d'un système au sens des moindres carrés

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes et soit $A = QR$ une factorisation QR de A.

Proposition

$$QQ^T\vec{b} = \text{proj}_{\text{Col}(A)}\vec{b} \qquad \text{pour tout } \vec{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition

Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par la formule

$$\hat{x} = R^{-1}Q^T\vec{b}.$$

Série 12, Ex 20

Soit A une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, et soit $A = QR$ sa factorisation QR. Alors R est une matrice inversible.

A. Vrai

B. Faux

Série 12, Ex 20, solution

Série 12, Ex 21

Calculer une factorisation QR de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Série 12, Ex 21, solution

Série 12, Ex 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = QR$ la décomposition QR de A. Alors

[A.] $r_{33} = 2\sqrt{2}$ [B.] $r_{33} = \sqrt{2}$ [C.] $r_{33} = \sqrt{3}$ [D.] $r_{33} = 3\sqrt{2}$

Série 12, Ex 22, solution

Série 12, Ex 23

Soient A une matrice non-nulle de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors, il est toujours vrai que

A. le vecteur $b - Ax$ appartient à $\ker(A^T)$ pour un unique choix de $x \in \mathbb{R}^n$.
B. la matrice A^TA est inversible.
C. l'équation $Ax = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.
D. si $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ sont deux solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, alors $A\hat{x} = A\hat{x}'$

Série 12, Ex 23, solution

Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

À savoir faire :

1. Calculs avec produits scalaires et normes.
2. Déterminer si un ensemble de vecteurs est orthogonal ou orthonormal.
3. Trouver une base orthogonale à partir d'un ensemble génératrice donné en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.
4. Trouver l'orthogonal à un sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$.
5. Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
6. Trouver les solutions au sens des moindres carrées d'un système d'équations linéaires.
7. Calculer la droite de régression à partir d'un ensemble de points dans $\mathbb{R}^n$.
8. Calculer la décomposition QR d'une matrice donnée.

Devoirs pour la semaine prochaine

Devoirs pour mardi :

- MOOC 10.0-10.4 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 10.5 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 10.6.1 : faire quelques exercices en ligne.
- La partie 10.6 - 10.9 du MOOC est optionnelle (mais recommandé) et elle ne fera pas partie de l'examen

.