Algèbre linéaire
Chapitre 8: diagonalisation

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 10

8.11 Valeurs propres complexes

Théorème (Théorème fondamental de l'algèbre)

Soit $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors $p(x)$ se factorise en un produit de facteurs linéaires, i.e. il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{2s} \in \mathbb{C}$ tels que

$$p(x) = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_{2s}).$$

De plus, si $\nu = a + ib \in \mathbb{C}$ est une racine de $p(x)$, alors $\bar{\mu} = a - ib$ est également une racine de $p(x)$.

Critère de diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$:
Une transformation linéaire $\phi : V \to V$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de ϕ est égale à sa multipicité algébrique.

Valeurs propres complexes, exemple

Est-que la matrice suivante est diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres complexes, exemple

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2-t & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & \frac{1}{2}-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}-t \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = +\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2(t-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2})}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}+(t-\frac{1}{2})^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-t+t^2\right) = (2-t)\left(1-t+t^2\right)$$

Valeurs propres complexes, exemple

8.10 Méthode de diagonalisation pour A $n \times n$

- Calculer $c_A(t) = \det(A - tI)$.
- Trouver les racines $c_A(t)$, c'est-à-dire, les valeurs propres de A.
- Si $c_A(t)$ possède (au moins) un facteur degré 2 irréductible dans $\mathbb{R}$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- Pour chaque valeur propre λ de A, trouver $\dim E_\lambda$ ainsi qu'une base de E_λ.
- Pour chaque valeur propre λ de A, comparer $\dim E_\lambda$ avec la multiplicité algèbrique de λ. Si ces dernières sont égales, alors A est diagonalisable. Dans le cas contraire, elle ne l'est pas.
- Si A est diagonalisable, alors la réunion des bases des espaces propres est une base (notons-la $\mathscr{B}$) de V.
- La matrice $D = [T_A]_{\mathscr{B}}$ est diagonale. En particulier,
  - la diagonale de D contient les valeurs propres, repétées selon leur multiplicité,
  - on définit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres, dans le même ordre
  - et $A = PDP^{-1}$.

Calculs à savoir faire :

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice.
2. Calculer les valeurs propres d'une matrice.
3. Calculer les espaces propres d'une matrice.
4. Calculer la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre.
5. Déterminer si une matrice est diagonalisable et si oui, calculer sa diagonalisation, i.e.
   - définir la matrice diagonale D qui contient les valeurs propres, repétées selon leur multiplicité,
   - définir P comme la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres, dans le même ordre
   - et dire que $A = PDP^{-1}$.

Série 10, ex 11

Est-que la matrice suivante est diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Série 10, ex 11

$$c_B(t) = \begin{vmatrix} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} :\overset{L(2,4,1)}{\longrightarrow}: \begin{vmatrix} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix}$$

$$:\overset{L(1,4,-2)}{\longrightarrow}: \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -2(1-t) \\ 0 & 1-t & 1-t \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)(1-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} :\underset{L(3,2,1)}{\overset{L(3,1,1)}{\longrightarrow}}:= (2-t)(1-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -t-1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2-t)(1-t)^2(1+t)$$

Série 10, ex 11. Diagonalisable

On admet que le polynôme caractéristique de B est $c_B(t) = -(1-t)^2(1+t)(2-t)$. Alors

A. B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

B. B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Série 10, ex 11. E_{λ_1}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_1} pour $\lambda_1 = 1$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. E_{λ_2}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_2} pour $\lambda_2 = -1$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. E_{λ_3}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_3} pour $\lambda_3 = 2$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. Diagonalisation

Trouver une matrice P telle que $P^{-1}BP$ est diagonale.

Question 2

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille 3×3 qui n'est pas la matrice identité. Si le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (1-t)^3$, alors A n'est pas diagonalisable.

A. Vrai

B. Faux

Question 3

Soit B une matrice diagonalisable. Quelles affirmations sont vraies ?

A. Si B est inversible, alors B^{-1} est diagonalisable.

B. B^k est diagonalisable pour tout entier $k > 0$.

C. Toute matrice ligne-équivalente à B est diagonalisable.

D. Aucune des affirmations ci-dessus n'est toujours vraie.

Question 4

Soient A et B deux matrices avec les mêmes vecteurs propres. Montrer que si A est diagonalisable, alors $AB = BA$.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 9.1-9.4 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- Facultatif : Se préparer pour l'examen blanc.
- Facultatif : Rédiger une solution pour l'exercice de rédaction.

9.1 Géométrie dans le plan et l'espace I

Définition

Le *produit scalaire Euclidien* sur $\mathbb{R}^n$ est l'application $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n,$$

ceci pour tout $u = (u_1, , \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $u \cdot v = v \cdot u$;
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
- $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$;
- $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$, alors $u = 0$.

Définition

La *longueur* (ou *norme*) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.

Définition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non-nuls. Alors l'*angle* entre les droites de vecteurs directeurs u, v est défini comme étant l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ tel que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

Un *produit scalaire* sur V est une application $\langle u, v\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. *(Symétrie)*
- $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$. *(Additivité)*
- $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle$. *(combiné avec 2. => Bilinéarité)*
- $\langle u, u\rangle \geq 0$ et si $\langle u, u\rangle = 0$, alors $u = 0$. *(Définie positivité)*

Pour $u, v \in V$, le nombre réel $\langle u, v\rangle$ est appelé le *produit scalaire de* u *et* v.

9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

On définit la *norme* de $v \in V$, notée $||v||$, par $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
On définit la *distance* entre deux vecteurs $u, v \in V$ comme étant $||u - v||$.

Théorème (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||, \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Définition

L'*angle* θ entre u et v est défini tel que $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$.

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v\rangle = 0$.

Théorème (Inégalité du triangle)

Pour tout $u, v \in V$, on a $$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Théorème (Théorème de Pythagore généralisé)

Supposons que $u_1, \ldots, u_t \in V$ soient des vecteurs deux-à-deux orthogonaux (i.e. $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq t$). Alors

$$\|u_1 + \cdots + u_t\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_t\|^2.$$

Question 5

Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $u \cdot v$.

A. 10

B. 7

C. $\frac{39}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 6

Quels vecteurs sont orthogonaux à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport au produit scalaire usuel ?

A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 7

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille $m \times n$ alors chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$ (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).

A. Vrai

B. Faux

Question 8

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle\,,\,\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soit $u \in V$ un vecteur fixe. Alors l'application $T\colon V \to \mathbb{R}$ définie par $T(v) = \langle u, v\rangle$ est une application linéaire.

A. Vrai

B. Faux

Question 9

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle\, , \,\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

A. Vrai

B. Faux

Devoirs pour mardi :

- MOOC 9.5-9.7 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 9.71 : Faire quelques exercices en ligne.