

# Algèbre linéaire

## Chapitre 9 : Valeurs et vecteurs propres

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 9



## 8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions, exemples

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

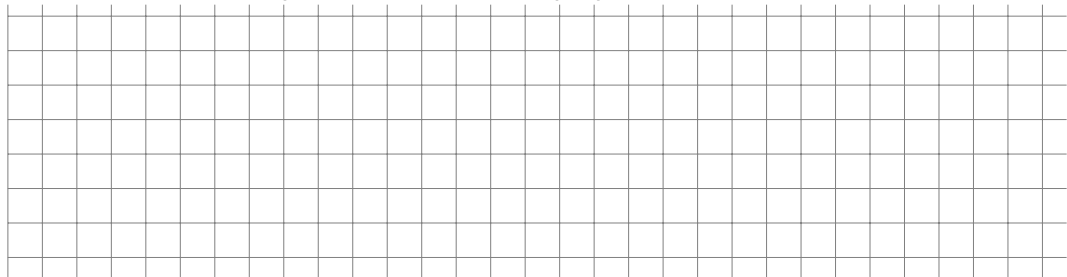
### Définition

$\lambda \in \mathbb{R}$  est une *valeur propre* de  $A$  s'il existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  non-nul tel que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ , alors toute solution non-nulle de  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  s'appelle un *vecteur propre* de  $A$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .

Attention !

- Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur propre par définition.
- Le nombre zéro peut être une valeur propre.

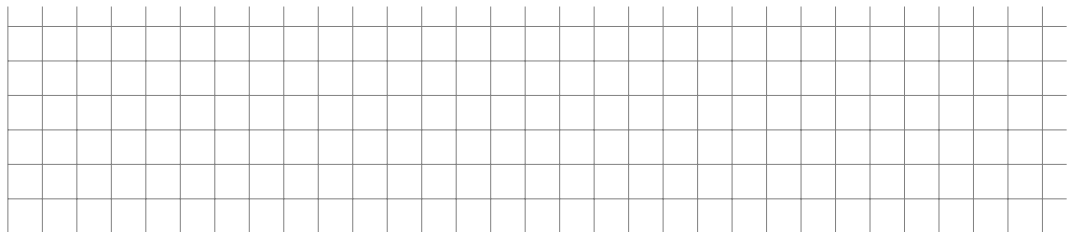


## 8.2 Valeurs propres : transformations linéaires et matrice associée

### Proposition

Soient  $\dim V < \infty$ ,  $T : V \rightarrow V$  une transformation linéaire et  $A = [T]_{\mathcal{B}}$  la matrice de  $T$  par rapport à une base  $\mathcal{B}$  de  $V$ .

$\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $T$  si et seulement si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ .



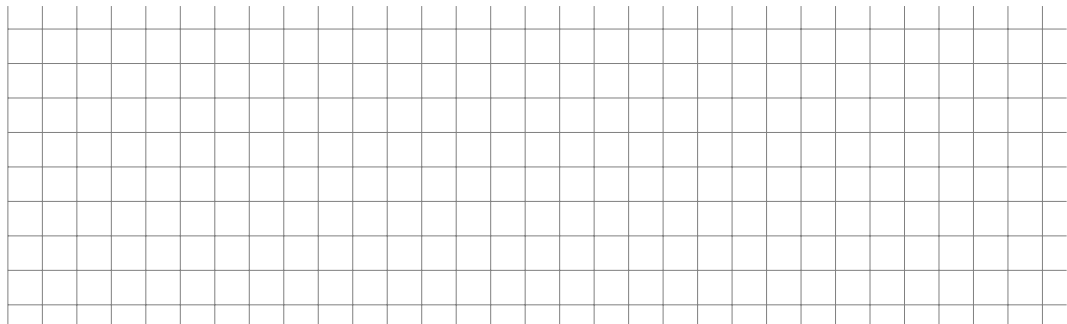
## 8.2 Valeurs propres : comment les trouver

## Série 9, Ex 1, D

On considère la matrice  $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 5 & 2 \\ 5 & -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$ . Alors le

déterminant de  $A_\lambda$  est

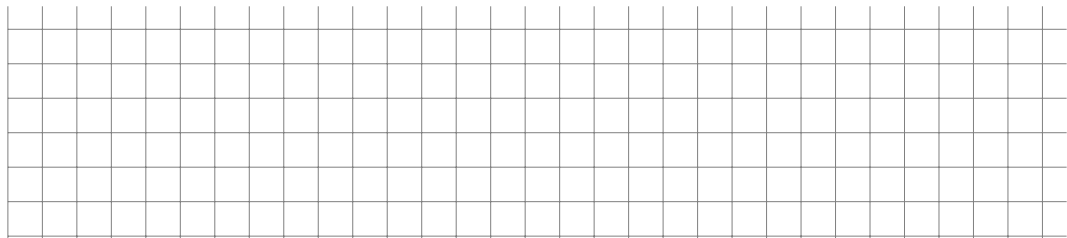
- A.  $\lambda^2 - 5\lambda + 5$
- B.  $\lambda^3 + 36\lambda$
- C.  $(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$
- D.  $-\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$ .



## Série 9, Ex 1, D

Soit  $A_\lambda$  la même matrice que dans la question précédente. Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  est-ce que le système d'équations linéaires  $A_\lambda x = 0$  a une infinité de solutions ?

- A. -9
- B. -6
- C. 3
- D. 0
- E. 6
- F. 9
- G. pour encore d'autres valeurs.



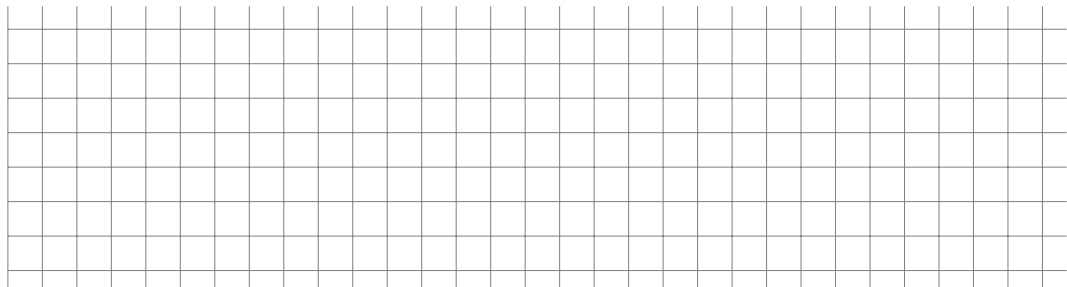
## Série 9, Ex 9

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de  $A$  sont

- 2 et 7
- 3 et 4
- 5, -1 et 1
- 2 et 3

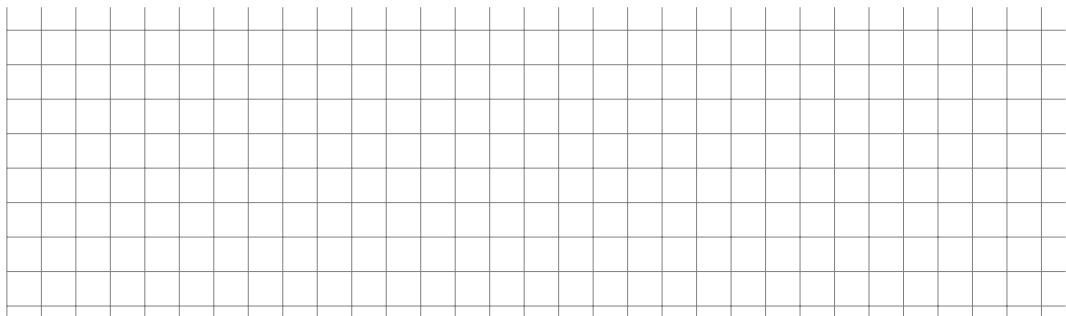


# Série 9, Ex 9 , solution

## Série 9, Ex 11

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- a Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées semblables. Alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.
- b Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées semblables. Alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes vecteurs propres.
- c Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées qui ont les mêmes valeurs propres. Alors  $A$  et  $B$  sont semblables.
- d Soit  $A$  une matrice carrée.  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres.



# Série 9, Ex 11 , solution



# Série 9, Ex 11 , solution

## 8.3 Polynôme caractéristique

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

### Définition

Le *polynôme caractéristique* de  $A$ , noté  $c_A(t)$ , est le polynôme défini par

$$c_A(t) = \det(A - tI).$$

### Proposition

Soit  $P$   $n \times n$  inversible. Alors

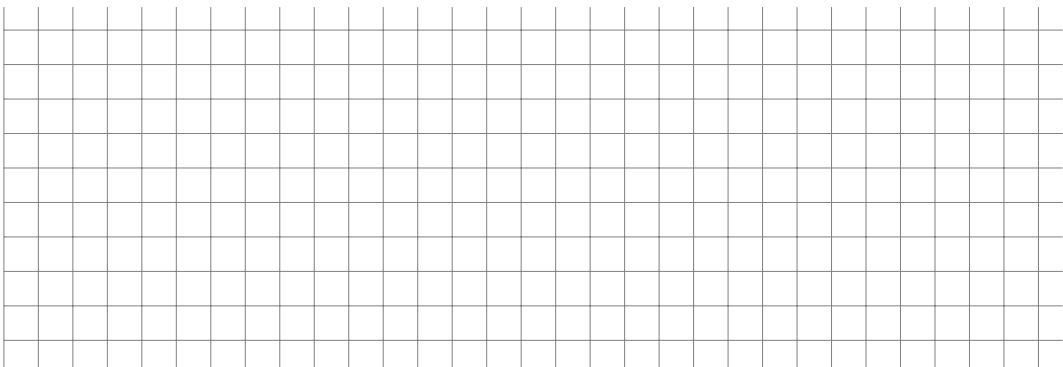
$$c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t).$$

Conséquence : Le polynôme caractéristique est invariable par rapport au changement de base.

## Série 9, Ex. 12

Soient  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a + b = 1$  et  $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$  une matrice non-inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- $\det(A) = -4$
- $A$  est une matrice de changement de base
- le polynôme caractéristique de  $A$  a une seule racine réelle
- le polynôme caractéristique de  $A$  a deux racines réelles distinctes



## Série 9, Ex. 12, solution

## Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 8.6 - 8.8 du MOOC et faire les petits quiz après les vidéos.
- Faire quelques exercices de 8.13.

## Série 9, Ex. 13

Quelles affirmations sont toujours vraies ? (plusieurs réponses correctes)

- a Une matrice carrée a au moins une valeur propre réelle.
- b Une matrice de taille  $n \times n$  a au plus  $n$  valeurs propres différentes.
- c Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Alors la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est toujours plus grande ou égale à la multiplicité géométrique de  $A$ .
- d Soit  $A$  une matrice carrée. Alors  $A$  est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de  $A$ .
- e Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sont 3, 1 et 4.



## Série 9, Ex. 13, solution

## Série 9, Ex. 13

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les vecteurs propres de  $A$  par rapport à la valeur propre 3.



## 8.4 Espaces propres de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

### Définition

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ . L'espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$  est le sous-ensemble de  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  défini par

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

### Proposition

Le sous-ensemble  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel.

$$E_\lambda = \{\vec{0}\} \cup \{ \text{les vecteurs propres de } A \text{ correspondants à } \lambda \}$$

## 8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres de $A$ $n \times n$

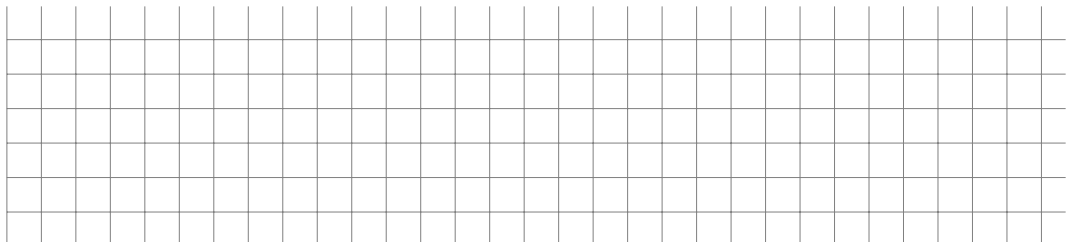
### Proposition

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres distinctes de  $A$  et  $v_1, \dots, v_r$  des vecteurs correspondants.

Alors  $v_1, \dots, v_r$  sont linéairement indépendants et la somme  $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$  est directe.

### Proposition

Supposons que  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $[T_A]_{\mathcal{B}}$  soit une matrice diagonale.



## 8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables

### Définition

Une matrice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  est dite *diagonalisable* s'il existe  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.



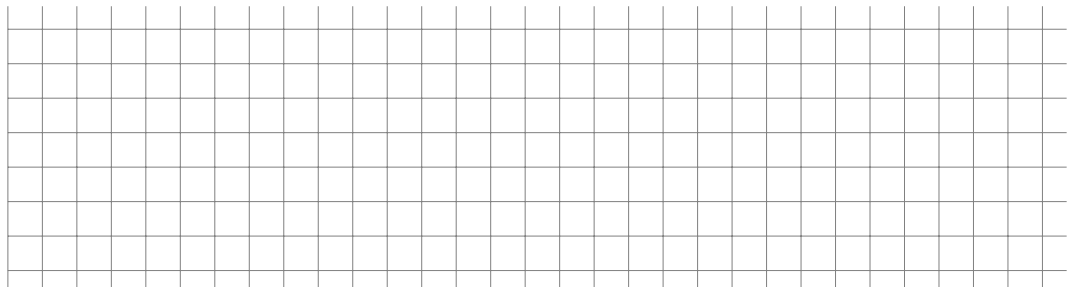
## Série 9, Ex 9 : Diagonaliser $A$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de  $A$  sont

- 2 et 7
- 3 et 4
- 5, -1 et 1
- 2 et 3



## Série 9, Ex 9 : Diagonaliser $A$ , solution

## 8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique de $A \ n \times n$

### Définition

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$ . Comme toute valeur propre de  $A$  est racine de  $c_A(t)$ , on peut factoriser

$$c_A(t) = (t - \lambda)^m p(t), \text{ où } p(\lambda) \neq 0 \text{ (i.e. } t - \lambda \text{ ne divise pas } p(t)\text{)}.$$

L'entier  $m$  est appelé la *multiplicité algébrique* de  $\lambda$ .

La dimension du sous-espace  $E_\lambda$  est appelée la *multiplicité géométrique* de  $\lambda$ .

### Proposition

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$ . Alors

- la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est supérieure ou égale à 1.
- la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de  $\lambda$ .

## 8.8 Critère de diagonalisabilité $A \ n \times n$

### Théorème

$A$  est diagonalisable si et seulement s'il existe  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  distincts et  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  tels que

$$c_A(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

et  $m_i = \dim E_{\lambda_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .

En d'autres termes : si et seulement si

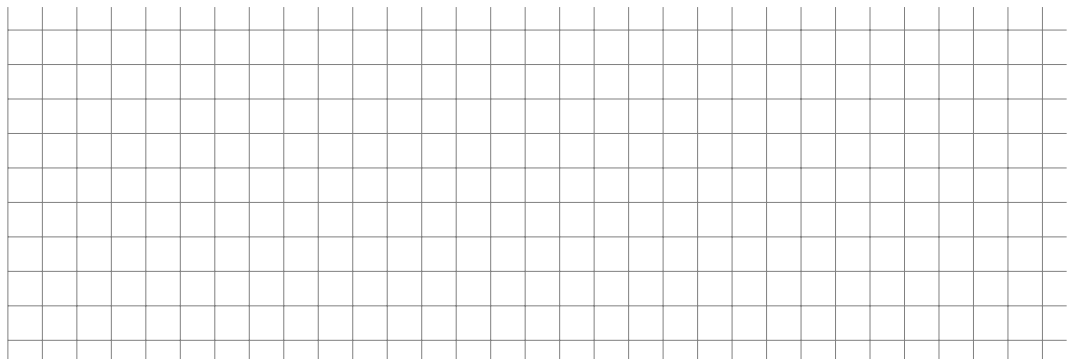
$c_A(t)$  est factorisable en monômes dans  $\mathbb{R}$  et les multiplicités géométriques et algébriques respectives coïncident.

Si  $A$  est diagonalisable alors  $m_1 + \dots + m_r = n$ .

## Série 9, Ex. 14

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  et soit  $P$  une matrice de taille  $n \times n$  telle que chacune des colonnes de  $P$  est un vecteur propre de la matrice  $A$ . Alors il est toujours vrai que

- $AP = PD$ , où  $D$  est une matrice diagonale
- $P$  est inversible et  $PAP^{-1}$  est une matrice diagonale
- $P$  est inversible et  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale
- $PA = DP$  où  $D$  est une matrice diagonale

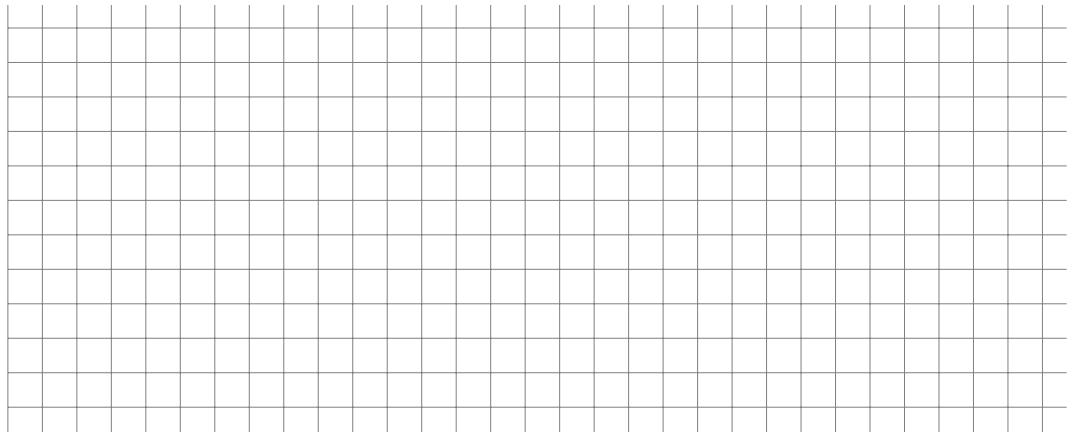


## Série 9, Ex. 14, solution

## Série 9, Ex. 15

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  de rang  $m < n$ . Alors,

- 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité géométrique  $n - m$
- 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité algébrique  $n - m$
- 0 est une valeur propre de  $A$  de multiplicité algébrique  $\geq n - m$
- 0 n'est pas valeur propre de  $A$



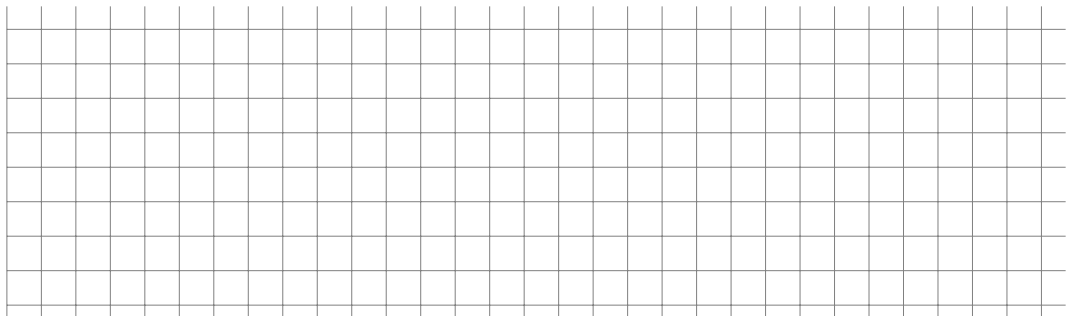
## Série 9, Ex. 15, solution

## Série 9, Ex. 16

Soit  $A$  une matrice de taille  $3 \times 3$  tel que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $c_A(t) = (2 - t)^3$ . Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- $A$  est inversible.
- $A$  est diagonalisable.
- $\det(A) \neq 0$ .
- La seule valeur propre de  $A$  est 2.
- Aucune des affirmations ci-dessus n'est vraie.

(plusieurs réponses possibles)

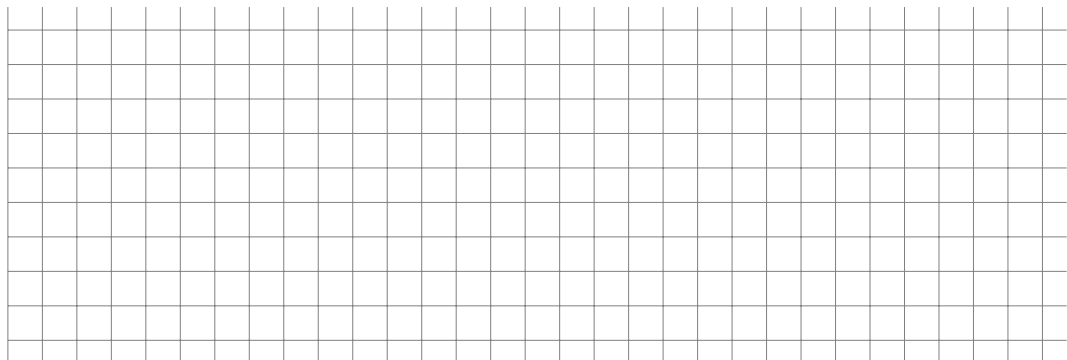


## Série 9, Ex. 16, solution

## Série 9, Ex. 17

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille. On suppose que  $B$  est une matrice inversible. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et aussi de  $B$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A + B$
- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $AB$
- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $BAB^{-1}$
- $\lambda^2$  est une valeur propre de la matrice  $BA$ .



## Série 9, Ex. 17, solution

## Devoirs pour mardi :

- MOOC 8.9-9.10 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 8.13 : faire les exercices en ligne.