

Algèbre linéaire

Chapitre 6 : Bases et dimension

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 7



6.6 Rang-ligne, rang-colonne (compléments)

Théorème

Soit A $m \times n$. Le rang-colonne de A est égal au rang-ligne de A .

Question 1

Soit A une matrice $m \times n$ telle que l'application linéaire $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $v \mapsto Av$ est bijective. Alors l'application linéaire $T_{A^T}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $v \mapsto A^T v$ est aussi bijective.

- A. Vrai
- B. Faux

6.7 Bases de l'image et du noyau (compléments)

Proposition

Soient A une matrice $m \times n$ et \hat{A} une matrice échelonnée ligne-équivalente à A . Si les pivots de \hat{A} se situent dans les colonnes aux indices i_1, \dots, i_t de \hat{A} , alors les colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_t} de A forment une base de l'espace-colonnes de A .

Question 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\text{Lgn } A$, une base de $\text{Col } A$ et une base de $\text{ker } A$.

Série 7, Exercice 8

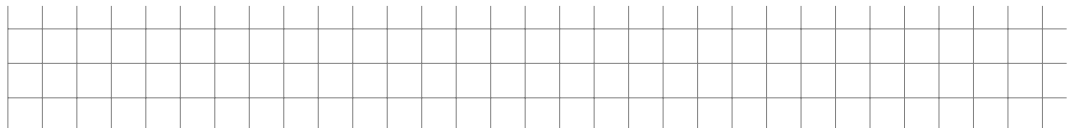
Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes d'applications linéaires, avec les dimensions des espaces,

$$\vec{T}_{AB} : \underset{\vec{T} \dots}{\mathbb{R}^{\dots}} \rightarrow \underset{\vec{T} \dots}{\mathbb{R}^{\dots}} \rightarrow \mathbb{R}^{\dots}.$$

(a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Série 7, Exercice 8, solution

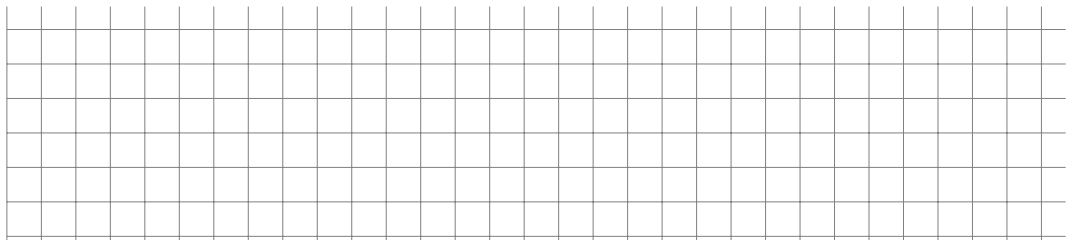


Série 7, Exercice 9

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et

$T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

- (a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

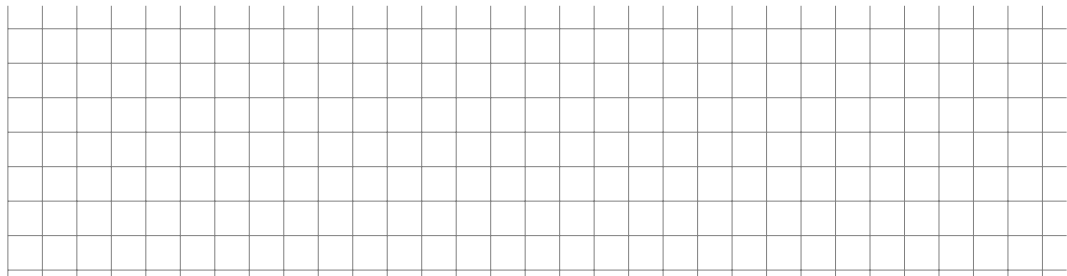


Série 7, Exercice 9, solution

Série 7, Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- (a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V . Alors V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.
- (b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V , alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V .
- (c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.
- (d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

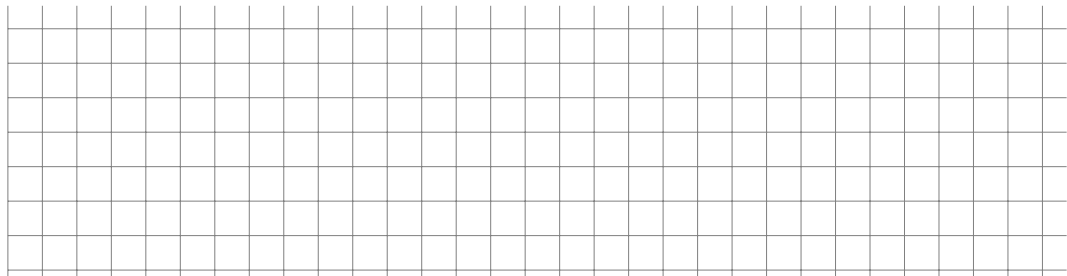


Série 7, Exercice 6, solution

Série 7, Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est contenue dans \mathbb{R}^n .
- b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.
- c) La transformation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.
- d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.



Série 7, Exercice 7, solution

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 6.8 - 6.12 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 6.13 : Faire quelques exercices en ligne.
- Réviser et discuter sur Ed Discussion.

Algèbre linéaire

Chapitre 6b : Changement de base

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 7



6.9 Changement de base, matrices de passage

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition

Toute application linéaire $T \in \mathcal{L}(V, V)$ est appelée une *transformation linéaire*, ou un *opérateur linéaire*.

Si $\dim V < \infty$ et \mathcal{B} est une base ordonnée de V , alors on écrit $[T]_{\mathcal{B}}$ pour désigner la matrice de T par rapport à la base \mathcal{B} .

Définition

Soient $\dim V = n < \infty$ et \mathcal{B}, \mathcal{C} deux bases ordonnées de V .

La *matrice de passage entre les bases \mathcal{B} et \mathcal{C}* est la matrice $[id_V]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, où $id_V : V \rightarrow V$ est l'application définie par $T(v) = v$ pour tout $v \in V$.

6.9 Changement de base, matrices de passage

Lemme

Soient $\dim V = n < \infty$ et \mathcal{B}, \mathcal{C} deux bases ordonnées de V .

Posons $P = [id_V]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Alors :

- $P[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$.
- $P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P = [T]_{\mathcal{B}}$.

6.12 Changement de base, cas général

Soient A_1, A_2 deux matrices de taille $n \times n$.

Définition

On dit que A_1 et A_2 sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P $n \times n$ telle que $P^{-1}A_1P = A_2$.

Si $A_1, A_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices semblables, alors $\text{rang}A_1 = \text{rang}A_2$.

Si $A_1, A_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices semblables, alors A_1 est inversible si et seulement si A_2 est inversible.

6.12 Changement de base, cas général

Soient V, W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \rightarrow W$ un application linéaire.

Lemme

Considérons deux bases ordonnées $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de V ainsi que deux bases ordonnées $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ de W . Alors

$$[T]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_2} = [id_W]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1} [T]_{\mathcal{C}_1 \mathcal{B}_1} [id_V]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}.$$

Série 7, Ex 13

Soit \mathcal{E} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = [\text{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\text{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

Série 7, Ex 13, I

La matrice $P_{B\mathcal{E}}$ est

A.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $P_{\mathcal{E}B}$ est

A.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère les deux bases suivantes de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{B} = (t^2 - 1, t + 1, t - 1)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$.

Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{BC}} = [\text{id}]_{\mathcal{BC}}$ et $P_{\mathcal{CB}} = [\text{id}]_{\mathcal{CB}}$

La matrice P_{CB} est

A.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P_{BC} est

A.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Serie 7, Ex 10, IV

Soit $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(p) = p'(t)t + p(0)$. Alors la matrice $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ est :

A.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Serie 7, Ex 10, V

Soit $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(p) = p'(t)t + p(0)$. Alors, la matrice $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B} = (t^2 - 1, t + 1, t - 1)$ est :

A.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

C.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$.

Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. $\ker(A) = \ker(B)$
- B. $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$
- C. $\text{Col}(A) = \text{Col}(B)$
- D. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$

Serie 7, Ex 12

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto Av$. Soient A' une matrice $m \times n$ ligne-équivalente à A et $T_{A'}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto A'v$.

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. $\ker T_A = \ker T_{A'}$.
- B. $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_{A'})$.
- C. $\operatorname{im} T_A = \operatorname{im} T_{A'}$.
- D. $\dim(\operatorname{im} T_A) = \dim(\operatorname{im} T_{A'})$.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 7.1 - 7.5 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 7.8 : faire quelques exercices en ligne (sans les parties sur la règle de Cramer).

Jeudi prochain nous ferons une séance de révision. Révisez tout le matériel des chapitres 1-7 et puis faites le quiz d'entraînement sur Moodle avant jeudi.