Algèbre linéaire
Chapitre 6 : Bases et dimension

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 7

6.6 Rang-ligne, rang-colonne (compléments)

Théorème

Soit A $m \times n$. Le rang-colonne de A est égal au rang-ligne de A.

Question 1

Soit A une matrice $m \times n$ telle que l'application linéaire $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $v \mapsto Av$ est bijective. Alors l'application linéaire $T_{A^T} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ donnée par $v \mapsto A^T v$ est aussi bijective.

A. Vrai

B. Faux

6.7 Bases de l'image et du noyau (compléments)

Proposition

Soient A une matrice $m \times n$ et $\hat{A}$ une matrice échelonnée ligne-équivalente à A. Si les pivots de $\hat{A}$ se situent dans les colonnes aux indices $i_1, \ldots, i_t$ de $\hat{A}$, alors les colonnes $C_{i_1}, \ldots, C_{i_t}$ de A forment une base de l'espace-colonnes de A.

Question 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathrm{Lgn}\, A$, une base de $\mathrm{Col}\, A$ et une base de $\ker A$.

Série 7, Exercice 8

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes d'applications linéaires, avec les dimensions des espaces, $\vec{T}_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\vec{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\vec{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots}$.

(a) AB, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Série 7, Exercice 8, solution

Série 7, Exercice 9

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3.$

(a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2\left(T_1(\vec{x})\right)$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Série 7, Exercice 9, solution

Série 7, Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.

(b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.

(c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.

(d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Série 7, Exercice 6, solution

Série 7, Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.

b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.

c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.

d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.

Série 7, Exercice 7, solution

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 6.8 - 6.12 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 6.13 : Faire quelques exercices en ligne.
- Réviser et discuter sur Ed Discussion.

Algèbre linéaire
Chapitre 6b : Changement de base

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 7

6.9 Changement de base, matrices de passage

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

Toute application linéaire $T \in \mathcal{L}(V, V)$ est appelée une *transformation linéaire*, ou un *opérateur linéaire*.
Si $\dim V < \infty$ et $\mathscr{B}$ est une base ordonnée de V, alors on écrit $[T]_{\mathscr{B}}$ pour désigner la matrice de T par rapport à la base $\mathscr{B}$.

Définition

Soient $\dim V = n < \infty$ et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases ordonnées de V.
La *matrice de passage entre les bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ est la matrice $[id_V]_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$, où $id_V : V \to V$ est l'application définie par $T(v) = v$ pour tout $v \in V$.

Lemme

Soient $\dim V = n < \infty$ *et* $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ *deux bases ordonnées de* V.
Posons $P = [id_V]_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$. *Alors :*

- $P[v]_{\mathscr{B}} = [v]_{\mathscr{C}}$.
- $P^{-1}[T]_{\mathscr{C}} P = [T]_{\mathscr{B}}$.

6.12 Changement de base, cas général

Soient A_1, A_2 deux matrices de taille $n \times n$.

Définition

On dit que A_1 *et* A_2 *sont semblables* s'il existe une matrice inversible P $n \times n$ telle que $P^{-1}A_1P = A_2$.

Si $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices semblables, alors rang$A_1 =$ rangA_2.

Si $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices semblables, alors A_1 est inversible si et seulement si A_2 est inversible.

6.12 Changement de base, cas général

Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ un application linéaire.

Lemme

Considérons deux bases ordonnées $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ de V ainsi que deux bases ordonnées $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ de W. Alors

$$[T]_{\mathscr{C}_2\mathscr{B}_2} = [id_W]_{\mathscr{C}_2\mathscr{C}_1}[T]_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}[id_V]_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}.$$

Série 7, Ex 13

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

Série 7, Ex 13, I

La matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ est

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Série 7, Ex 13, II

La matrice $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Serie 7, Ex 10, I

On considère les deux bases suivantes de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{B} = (t^2 - 1, t + 1, t - 1)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$.
Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

Serie 7, Ex 10, II

La matrice $P_{\mathcal{CB}}$ est

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Serie 7, Ex 10, III

La matrice $P_{\mathcal{BC}}$ est

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $T\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(p) = p'(t)t + p(0)$. Alors la matrice $[T]_\mathcal{C} = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ est :

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $T\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(p) = p'(t)t + p(0)$. Alors, la matrice $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B} = (t^2 - 1, t + 1, t - 1)$ est :

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Serie 7, Ex 11

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$.

Serie 7, Ex 11

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker(A) = \ker(B)$

B. $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$

C. $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B)$

D. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$

Serie 7, Ex 12

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto Av$. Soient A' une matrice $m \times n$ ligne-équivalente à A et $T_{A'} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto A'v$.

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker T_A = \ker T_{A'}$.

B. $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_{A'})$.

C. $\operatorname{im} T_A = \operatorname{im} T_{A'}$.

D. $\dim(\operatorname{im} T_A) = \dim(\operatorname{im} T_{A'})$.

E. Aucunes des affirmations ci-dessus.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 7.1 - 7.5 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 7.8 : faire quelques exercices en ligne (sans les parties sur la règle de Cramer).

Jeudi prochain nous ferons une séance de révision. Révisez tout le matériel des chapitres 1-7 et puis faites le quiz d'entraînement sur Moodle avant jeudi.