

# Algèbre linéaire

## Chapitre 5 : Applications linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 6



## 5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels.

### Définition

Soient  $V, W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $T : V \rightarrow W$  une application. On dit que  $T$  est une *application linéaire* (ou simplement que  $T$  est *linéaire*) si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tous  $u, v \in V$ , on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- $T(0_V) = 0_W$ .
- $T(-v) = -T(v)$  pour tout  $v \in V$ .

Supposons que  $\dim V = n < \infty$  et que  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  désigne une base ordonnée de  $V$ . Alors  $T$  est déterminée par les images  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ .

## 5.4 D'autres exemples, généralités I

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel admettant une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

Soient  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel arbitraire et  $w_1, \dots, w_n \in W$ . On définit l'application linéaire  $T : V \rightarrow W$  par  $T(v_k) = w_k, k = 1, \dots, n$ . Alors

$$T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n, (\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

L'application  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = (a_1, \dots, a_n)^T, (\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

est linéaire. Il s'agit des coordonnées par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

## 5.4 D'autres exemples, généralités II

Soient  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  une base de  $W$ .

Soit  $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$  une matrice  $m \times n$ ,  $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ .

On définit l'application linéaire  $T_A : V \rightarrow W$  associée à  $A$  par

$$[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A[v]_{\mathcal{B}_V}$$

On a aussi, pour  $k = 1, \dots, n$  :

$$[T_A(v_k)]_{\mathcal{B}_W} = A[v_k]_{\mathcal{B}_V} = A\vec{e}_k = \vec{a}_k, \text{ où } \vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

En d'autres termes :

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) = ([T_A(v_1)]_{\mathcal{B}_W} \dots [T_A(v_n)]_{\mathcal{B}_W})$$

## 5.5-5.6 Noyau et image d'une application linéaire

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire.

### Définition

Le *noyau* de  $T$  est le sous-ensemble de  $V$      $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$ .  
L'*image* de  $T$  est le sous-ensemble de  $W$      $\text{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$ .

### Proposition

Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

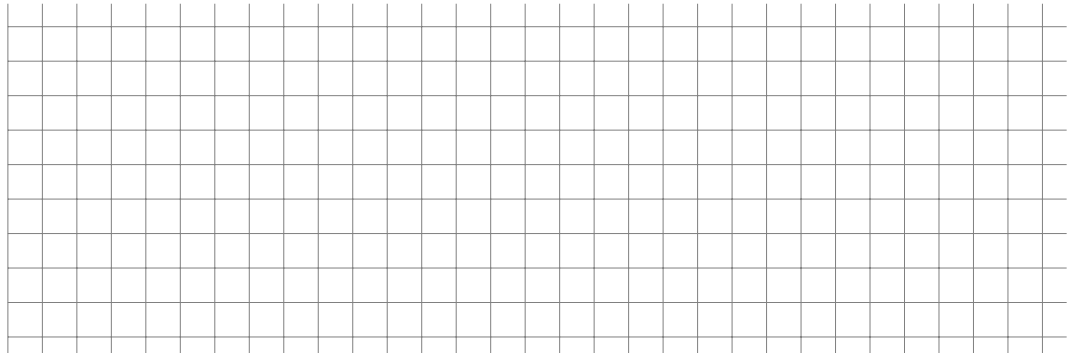
- Le noyau de  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- L'application  $T$  est injective si et seulement si  $\ker(T) = \{0_V\}$ .
- $\text{im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

Si  $\dim \text{im}(T) < \infty$ , alors on appelle l'entier  $\dim(\text{im}(T))$  le *rang* de  $T$ .

## Série 6, Exercice 13

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'application linéaire définie par  $x \mapsto Ax$ . Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. L'image de  $T_A$  est l'espace colonne de  $A$ .
- B. L'image de  $T_A$  est l'espace de tous les  $b \in \mathbb{R}^m$  tels que  $Ax = b$  est compatible.
- C. Le noyau de  $T_A$  est l'espace ligne de  $A$ .
- D. Le noyau de  $T_A$  est l'espace des solutions de l'équation  $Ax = 0$ .



## Série 6, Exercice 13, solution

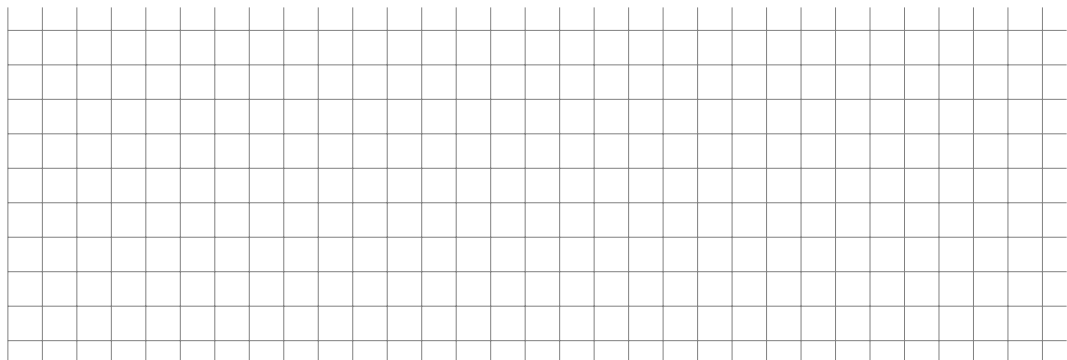
## Série 6, Exercice 14

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit l'application linéaire  $\vec{T}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  donnée par  $\vec{T}_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ . Remplacer le symbole  $?=?$  par le bon opérateur logique  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ , ou  $\neq$

(a)  $\vec{T}_A$  est injective  $?=?$   $A$  a une position pivot dans chaque colonne.

(b)  $\vec{T}_A$  est surjective  $?=?$   $A$  a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre  $m$  et  $n$ .



# Série 6, Exercice 14, solution

## 5.7-5.8 Le théorème du rang et critère de bijectivité

### Théorème

Si  $\dim V < \infty$ , alors  $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$  et

$$\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)).$$

### Corollaire (du théorème du rang)

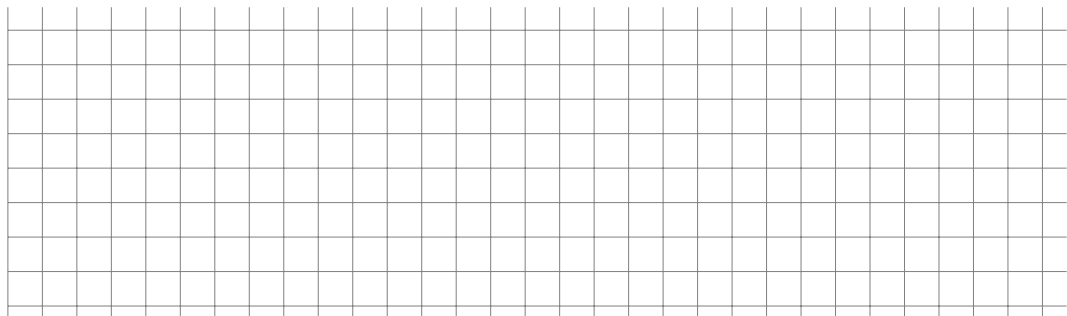
*Les affirmations suivantes sont vérifiées.*

- Si  $T$  est bijective, alors  $\dim V = \dim W$ .
- Si  $\dim V = \dim W$  et  $T$  est injective, alors  $T$  est bijective.
- Si  $\dim V = \dim W$  et  $T$  est surjective, alors  $T$  est bijective.

## Série 6, Exercice 15

Vrai ou faux ?

- A. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 2022 et  $W$  un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective  $T: V \rightarrow W$  est toujours de dimension 1.
- B. Soit  $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$  une application linéaire injective. Alors  $T$  est surjective.
- C. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base ordonnée de  $V$ . Alors l'application des coordonnées  $[\cdot]_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application linéaire bijective.



## Série 6, Exercice 15, solution

## 5.9 Opérations avec des applications linéaires

### Définition

Soient  $S$  et  $T : V \rightarrow W$  deux applications linéaires.

On définit  $T + S : V \rightarrow W$  par  $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$  et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit également  $\lambda T : V \rightarrow W$  par  $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$ .

### Lemme

*Les applications définies ci-dessus sont linéaires.*

### Lemme

*Soient  $U, V, W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $T : U \rightarrow V$ ,  $S : V \rightarrow W$  des applications linéaires.*

*Alors la composition  $S \circ T : U \rightarrow W$  est une application linéaire.*

## 5.10 Applications inversibles

### Lemme

*Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire bijective. Alors l'unique application  $S : W \rightarrow V$  telle que  $T \circ S = id_W$  et  $S \circ T = id_V$  est linéaire. On dira que  $T$  est une application linéaire inversible avec inverse  $S = T^{-1}$ .*

## Série 6, Exercice 17

Soient  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire de  $V = \mathbb{P}_2$  dans  $W = \mathbb{P}_1$  et  $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$  et  $C = (1, t)$  bases de  $V$  et  $W$ . Soit  $T$  telle que

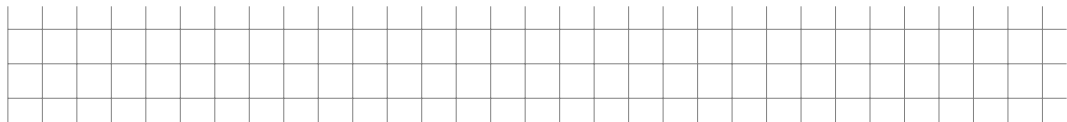
$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit  $p(t) = t^2$ , calculer  $T(p)$  ainsi que  $[T(p)]_C$ .

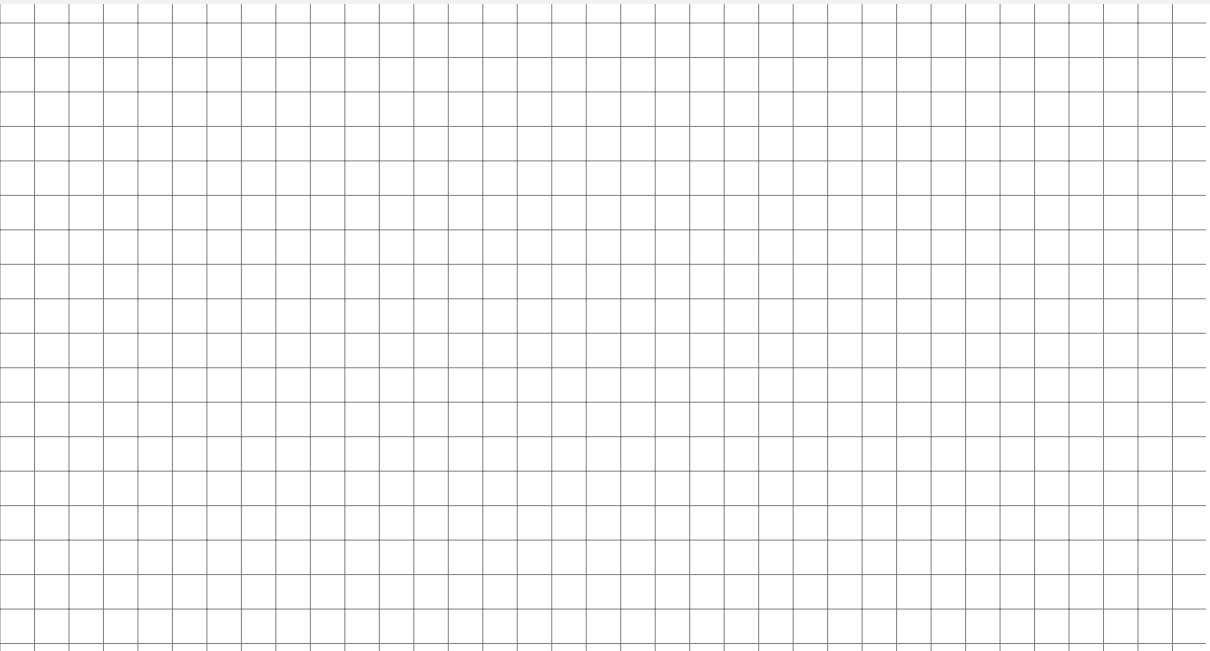
Quelle est la marche à suivre ?

Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

- Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée  $(B|p)$ .
- Alors  $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_3)$ .
- Calculer  $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ( $\leftarrow$  en colonne).
- Compléter la base  $C$  en une base de  $W$ .
- Trouver les coordonnées de  $T(p)$  par rapport à  $C$ .



# Série 6, Exercice 17, solution

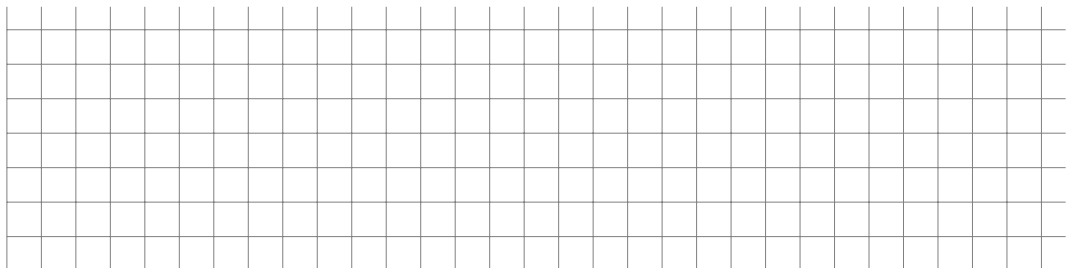


## Série 6, Révision, Exercice 5

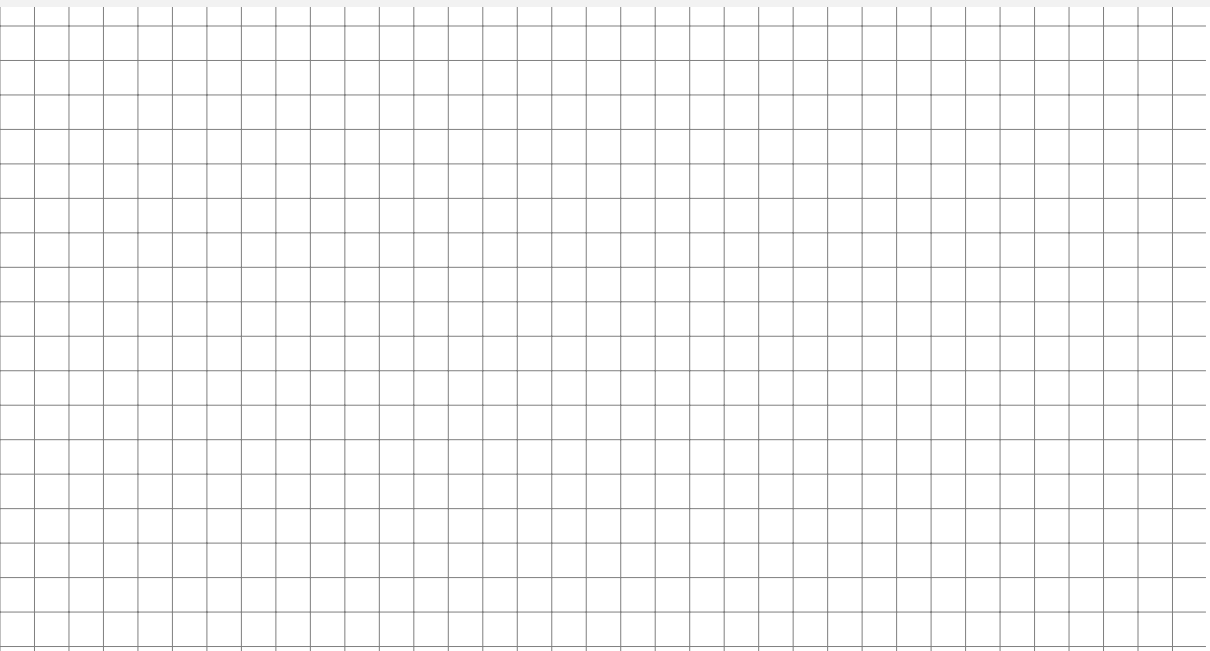
Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

- i) Écrire le système sous forme matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
- ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $A$ .
- iii) Trouver la solution générale de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$ .



# Série 6, Révision, Exercice 5, solution



## Série 6, Révision, Exercice 6

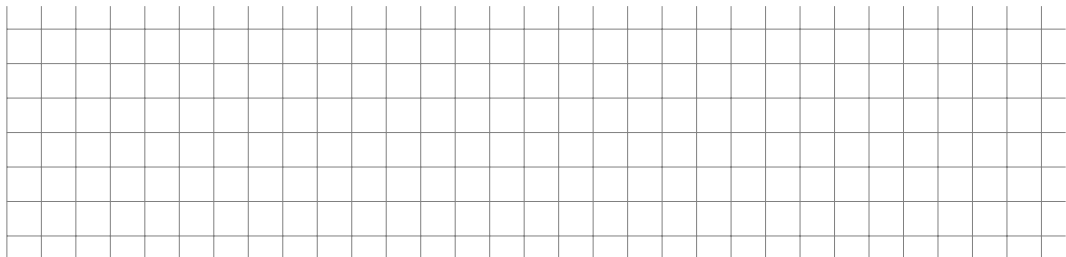
Calculer  $A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)$ , où

a)

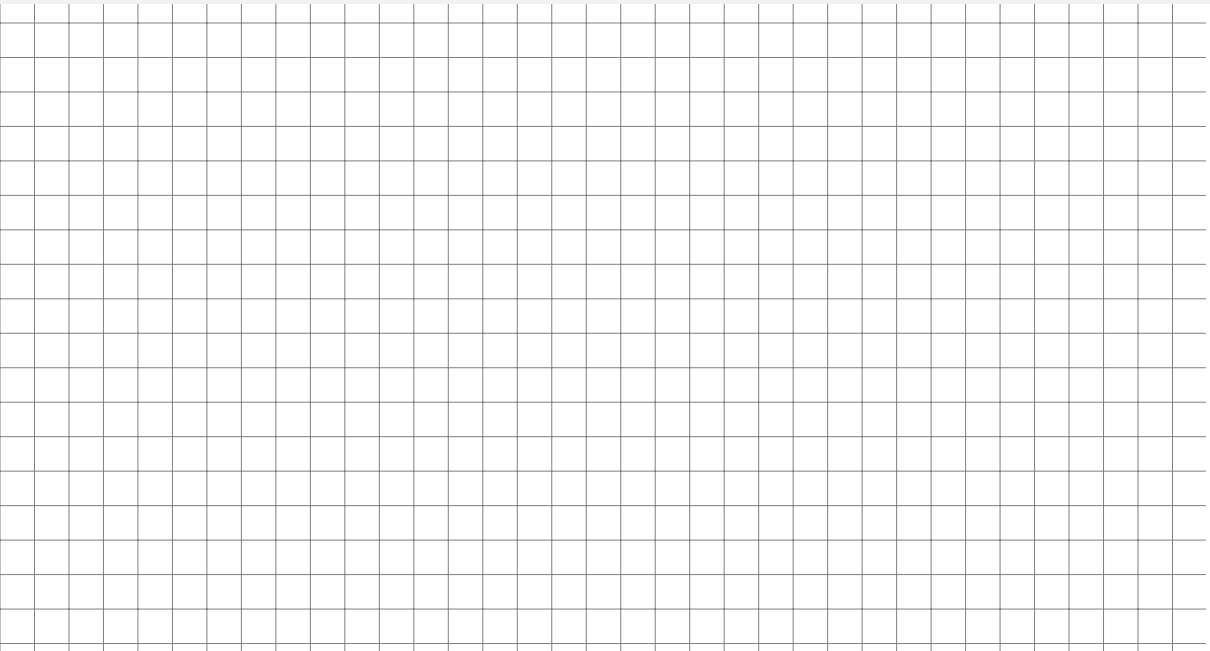
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$



# Série 6, Révision, Exercice 6, solution



## Devoirs pour jeudi :

- MOOC 6.1 - 6.2 : regarder les vidéos et faire les petits quiz associés.
- MOOC 6.4 - 6.5 : regarder les vidéos et faire les petits quiz associés.
- La partie 6.3 du MOOC est optionnelle.

# Algèbre linéaire

## Chapitre 6 : Applications linéaires et matrices

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 6



## 6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire

### Définition

Soient  $T : V \rightarrow W$  linéaire et  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement.

La *matrice de  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}_V$  et  $\mathcal{B}_W$*  est la matrice  $m \times n$

$$[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = ([T(v_1)]_{\mathcal{B}_W} \cdots [T(v_n)]_{\mathcal{B}_W}).$$

## 6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire : premières propriétés

### La propriété la plus importante

Soient  $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$  des bases ordonnées de  $V$  et  $W$  respectivement. Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V},$$

ceci pour tout  $v \in V$ .

## Série 6, Exercice 16

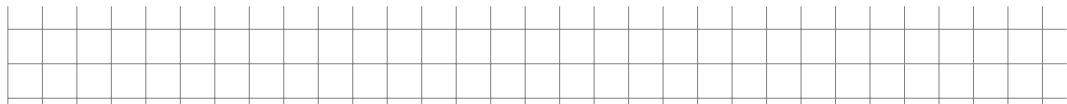
Soit  $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

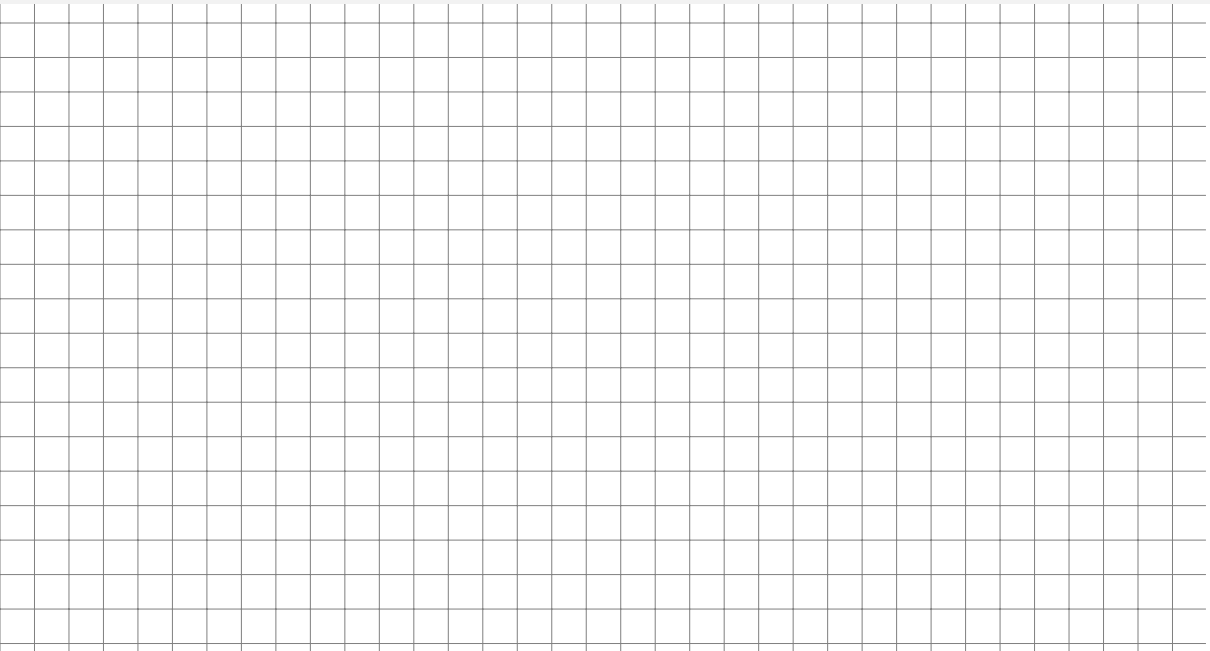
Soient  $E$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $B$  une base de  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a)** Donner la matrice  $M$  qui représente  $\vec{T}$  par rapport aux bases  $E$  (de départ) et  $B$  (d'arrivée).
- (b)** Même question pour les bases  $B$  (de départ) et  $E$  (d'arrivée).
- (c)** Même question pour les bases  $B$  (de départ) et  $B$  (d'arrivée).



# Série 6, Exercice 16, solution



## Série 6, Exercice 18

Soient  $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$  la base canonique de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et  $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

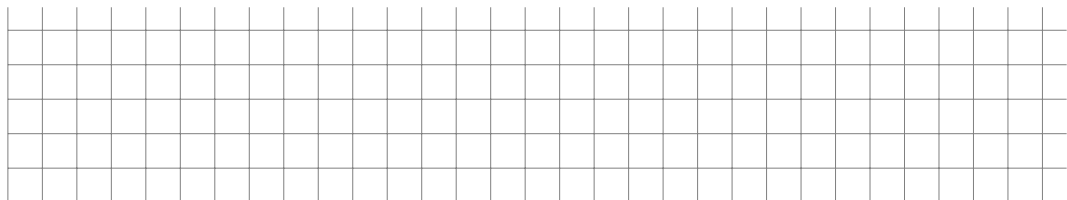
Alors, on a  $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , où

A.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D.  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



## Série 6, Exercice 18, solution

## Série 6, Exercice 19

Soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors la matrice  $M$  telle que  $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$  est

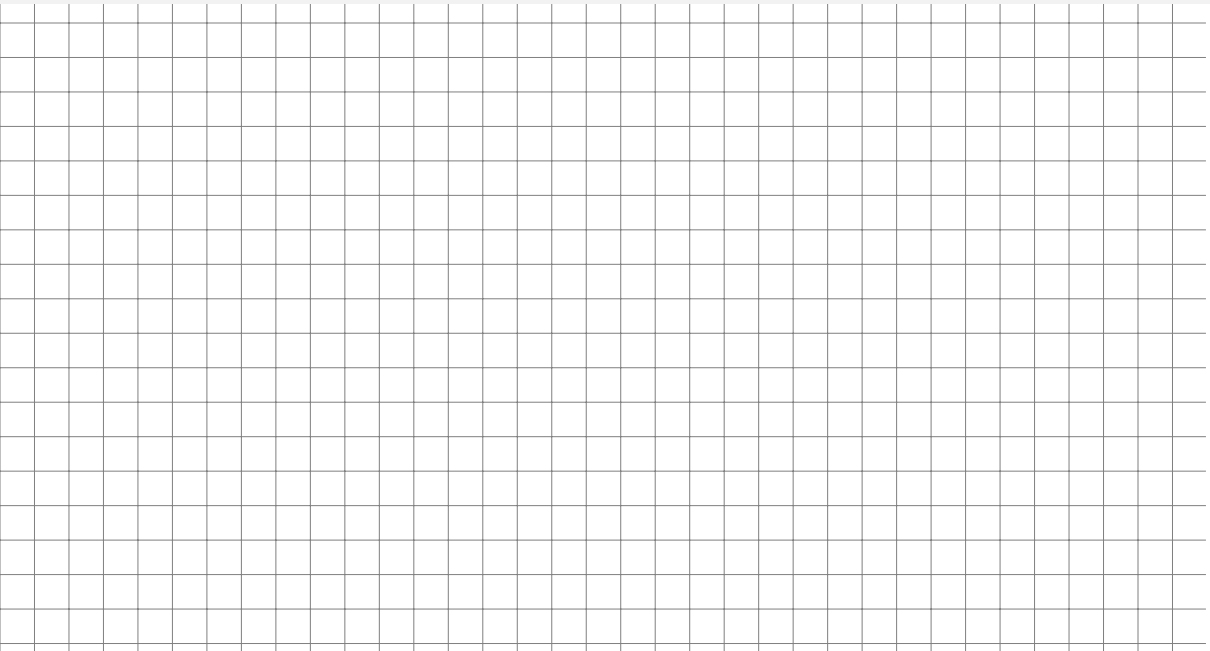
A.  $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

B.  $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

D.  $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

# Série 6, Exercice 19, solution



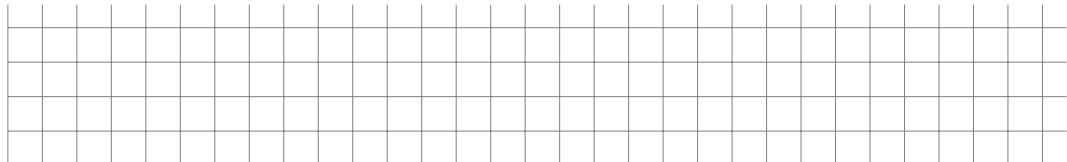
## Série 6, Exercice 20

Soient  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linéaire et les bases ordonnées  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{C} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Alors la matrice  $M$  telle que  $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$  est

- A.  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$       C.  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$
- B.  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$       D.  $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



## Série 6, Exercice 20, solution

## 6.4 La composition d'applications linéaires

### Proposition

Soient  $U, V, W$  trois  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$  des bases de  $U, V$  et  $W$  respectivement. Soient également  $T : U \rightarrow V$  et  $S : V \rightarrow W$  deux applications linéaires. Alors

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}.$$

## 6.5 Applications inversibles

### Proposition

Soient  $V, W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$  des bases de  $V, W$  respectivement, et  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Alors  $T$  est bijective si et seulement si  $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$  est une matrice inversible.

## Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 6.6 - 6.7 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 6.7.1 : faire quelques exercices en ligne (au moins un par sous-section).