Algèbre linéaire
Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 2

Les Pivots, clarification

Définition

Une matrice est dite échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- Le premier coefficient non-nul d'une ligne est à droite de celui de la ligne précédente. Un tel coefficient est appelé un pivot de la matrice.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Définition

Une matrice est dite échelonnée réduite si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- La matrice est échelonnée.
- Chaque pivot est égal à 1
- Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

Question 1

Vrai/faux : Une matrice peut avoir plusieurs formes échelonnées.

A. Vrai.

B. Faux.

Question 2

Vrai/faux : Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0, 0, \ldots, 0, 5]$ comme ligne, alors le système linéaire correspondant est incompatible.

A. Vrai.

B. Faux.

Question 3

Vrai/faux : Soit A une matrice dans la forme échelonnée. Alors chaque ligne contient au plus un pivot.

A. Vrai.

B. Faux.

Question 4

Vrai/faux : Un système d'équations linéaires homogène admet toujours au moins une solution.

A. Vrai.

B. Faux.

Question 5

On suppose que la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires est une matrice échelonnée réduite de taille 3×5 qui contient 3 pivots. Alors

A. ce système est compatible.

B. ce système est incompatible.

C. on ne peut rien dire sur la compatibilité de ce système.

Exercice 2

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2, solution

Question 6a

Le système associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

possède

A. une infinité de solutions,

B. une unique solution,

C. aucune solution.

Question 6b

Le système associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix},$$

possède

A. une infinité de solutions,

B. une unique solution,

C. aucune solution.

Question 6c

Le système associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 & 0 \\ 5 & 19 & 57 & 0 \end{pmatrix},$$

possède

A. une infinité de solutions,

B. une unique solution,

C. aucune solution.

Question 7

Le système associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

possède

A. aucune variable libre,

B. une variable libre,

C. deux variables libres,

D. trois variables libres.

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires

Il faut connaître les définitions et les résultats de ce chapitre (regarder encore une fois les concepts clés).

Calculs à maîtriser :

1. Échelonner des matrices (algorithme de Gauss)
2. Déterminer si un système d'équations linéaires possède une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions
3. Résoudre des systèmes d'équations linéaires.
4. Connaître les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si deux matrices données sont équivalentes selon les lignes.

Question 8

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h-4 \\ -1 & -1 & 2 & -3-h \end{pmatrix},$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors ce système d'équations linéaires

A. possède une infinité de solutions pour $h = 3$

B. possède une infinité de solutions pour $h = -3$

C. possède un nombre fini de solutions pour toute valeur $h \in \mathbb{R}$

D. possède une infinité de solutions pour toute valeur $h \neq \pm 3$.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 1.9 : faire les exercices en ligne (au moins un par sous-section). Vous pouvez aussi faire ces exercices le week-end ou dans les semaines prochaines.
- MOOC 2.1-2.4 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- Utiliser Ed Discussion.

Exercice 4

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Exercice 4, solution

Exercice 5

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. *(Idée : écrire AB sous la forme* $\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix}$*)*

(b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a t-on $AB = BA$?

(d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 5, solution

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.

(b) Le produit matriciel est commutatif.

(c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

(d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Exercice 6, solution

Exercice 7

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 7, solution

Rendu en groupe : 20-30 minutes pendant les exercices

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & h+11 \\ 2 & 14 & 1 & 6 \\ -1 & -7 & 1 & h-1 \end{array}\right),$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Donner l'ensemble des solutions selon le paramètre h.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 2.5 - 2.7 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 2.12 : faire quelques exercices en ligne (au moins une par sous-section, sauf les questions sur la décomposition LU).
- Poser ou répondre à une question sur Ed Discussion (facultatif mais recommandé).