Algèbre linéaire
Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 1

Les équations linéaires I

Définition : Une **équation linéaire** en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels (ou rationnels, complexes, ...), appelés *coefficients* de l'équation linéaire, et b est un réel (ou rationnel, complexe, ...), appelé parfois *terme de droite*.

Exemples

- $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 2$. Ici $n = 3$ et les coefficients de cette équation linéaire sont $a_1 = 3$, $a_2 = -2, a_3 = 7$.
- $\sqrt{2}x_1 - 4 - x_2 = \sqrt{3}x_2 + 18x_3$. En ajoutant d'un côté et de l'autre $4 - \sqrt{3}x_2 - 18x_3$, on obtient la forme $\sqrt{2}x_1 + (-1 - \sqrt{3})x_2 + (-18)x_3 = 4$, qui est une équation linéaire en $n = 3$ variables avec coefficients $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -(1 + \sqrt{3}), a_3 = -18$.

Les équations linéaires II

Contre-exemples

- $3x_1x_2 + 2x_2 = 3$ n'est pas de la forme (1).
- $2\sqrt{x_1} + 3x_2 = 7$ non plus.
- $\frac{1}{x_1} = 3$ n'est pas une équation linéaire. Ceci, même si on peut la mettre sous forme (1) en supposant que $x_1 \neq 0$ et en multipliant par x_1.

Exercice 5

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$

c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$

d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Exercice 5, solution

Système d'équations linéaires I

Définition : Un **système d'équations linéaires** (ou **système linéaire**) est une collection d'une ou plusieurs équations linéaires en les mêmes variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont les coefficients peuvent être différents.

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

avec m équations, n variables
et coefficients a_{ij} et b_i pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.
a_{ij}, b_i sont des nombres.

Système d'équations linéaires II

Exemples

1) $m = 2$ équations et $n = 3$ variables

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} a_{11} &= 3, & a_{12} &= 2, & a_{13} &= 4 \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= 8, & a_{23} &= 1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_1 &= 2 \\ b_2 &= 4 \end{aligned}$$

2) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_3 &= 5 \\ x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} a_{11} &= 3, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 4 \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 1, & a_{23} &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_1 &= 5 \\ b_2 &= 2 \end{aligned}$$

3) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 &= -\tfrac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= -\tfrac{1}{2} \\ a_{21} &= 2, & a_{22} &= -1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ b_2 &= -5 \end{aligned}$$

Système d'équations linéaires III

4) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} a_{11} &= \_\_, & a_{12} &= \_\_ \\ a_{21} &= \_\_, & a_{22} &= \_\_ \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_1 &= \_\_ \\ b_2 &= \_\_ \end{aligned}$$

5) $m =$ __ équations et $n =$ __ variables

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} a_{11} &= \_\_, & a_{12} &= \_\_ \\ a_{21} &= \_\_, & a_{22} &= \_\_ \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_1 &= \_\_ \\ b_2 &= \_\_ \end{aligned}$$

Solution d'un système linéaire I

Définition : Une **solution** d'un système d'équations linéaires est une liste ordonnée $(s_1, s_2, ..., s_n)$ (n-uplet) de nombres réels (ou rationnels, complexes, ...) qui font que chaque égalité du système est vraie (est satisfaite) quand $x_1, ..., x_n$ sont substitués par $s_1, ..., s_n$ dans l'ordre.
On indique avec $\mathscr{S} = \{(s_1, ..., s_n), (\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n), ...\}$ l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires donné.

Exemples

a) $(-16, 1, 12)$ est-il une solution du système linéaire de l'exemple 1 ?

$$\begin{array}{r} 3(-16) + 2(1) + 4(12) \stackrel{?}{=} 2 \\ (-16) + 8(1) + (12) \stackrel{?}{=} 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -48 + 2 + 48 \stackrel{\text{ok}}{=} 2 \\ -16 + 8 + 12 \stackrel{\text{ok}}{=} 4 \end{array} \Rightarrow (-16, 1, 12) \in \mathscr{S}$$

Solution d'un système linéaire II

b) $(-1, \frac{1}{2}, 1)$ est-il aussi solution du système linéaire de l'exemple 1 ?

c) **Exercice :** vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est solution du système linéaire de l'exemple 2.

d) **Exercice :** $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est-il aussi solution du système linéaire de l'exemple 2 ?

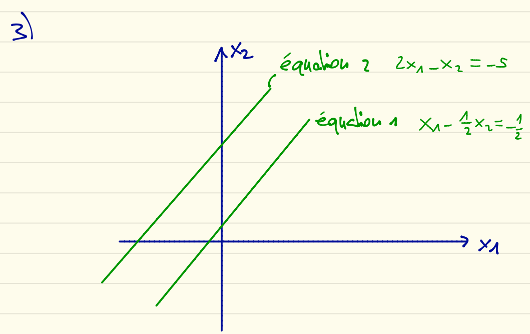
Solution d'un système linéaire III

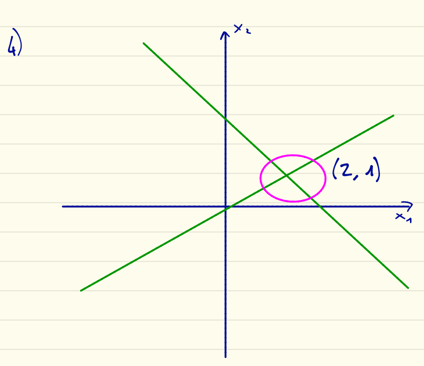
e) Le système linéaire de l'exemple 3 n'a pas de solution.

f) **Exercice :** vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire de l'exemple 4. Ce système a une seule et unique solution.

Solution d'un système linéaire IV

Interprétation géométrique



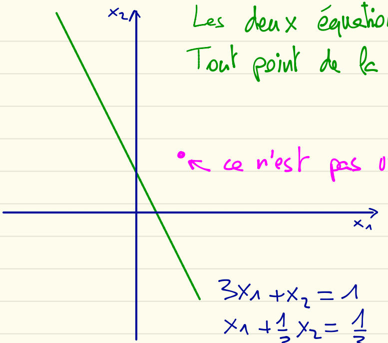


Solution d'un système linéaire V

5)

Les deux équations représentent la même droite.

Tout point de la droite est solution du système linéaire.



• ← ce n'est pas une solution

$$3x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}$$

Systèmes linéaires compatibles et incompatibles

Définition : Dans le cas où un système linéaire possède une solution (une ou plusieurs), on dit que le système linéaire est **compatible**. Autrement, on dit qu'il est **incompatible**.

De manière générale, il y a trois cas de figure :

a) le système n'a pas de solution (incompatible) ;

b) le système a une et une seule solution (compatible) ;

c) le système a une infinité de solutions (compatible).

Matrice des coefficients et matrice augmentée I

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres.
Exemple

6)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rrrr} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{array}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice des coefficients**

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice augmentée**

du système linéaire.

Matrice des coefficients et matrice augmentée II

Définition : Une matrice de m lignes et n colonnes est dite de **taille** $m \times n$. On peut la représenter à l'aide de $m \cdot n$ coefficients.
Notation $\quad A : m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{\substack{i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n}}$$

a_{ij} est l'élément de A qui se trouve à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Une matrice suffit à résumer l'information d'un système linéaire. Dans l'exemple 6, la matrice des coefficients a une taille 3×3, elle est carrée. La matrice augmentée a une taille 3×4.

Questions du premier chapitre :

- Quand un système d'équations linéaires admet-il une solution ?
- Combien de solutions un système d'équations linéaires peut-t-il avoir ?
- Comment peut-on trouver toutes les solutions ?

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 1.1 - 1.5 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- Poser une question sur Ed Discussion, ou répondre à une question sur Ed Discussion.
- Environ 1 heure de vidéos, plus travail d'apprentissage.

Algèbre linéaire
Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 1

Résumées I

Définition

Soit S un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. On définit 3 types d'opérations sur S, appelées *opérations élémentaires* , de la façon suivante.

- L'opération élémentaire de type **(I)** consiste à permuter deux équations du système S.
- L'opération élémentaire de type **(II)** consiste à multiplier une équation de S (c'est-à-dire tous les coefficients de ladite équation) par un scalaire non-nul $\lambda \in \mathbb{R}$.
- L'opération élémentaire de type **(III)** consiste à ajouter à une équation du système S un multiple d'une autre.

Résumées II

Théorème

Soit S un système d'équations linéaires et S' le système obtenu après application d'une opération élémentaire à S. Alors S et S' possèdent le même ensemble de solutions.

A un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

on associe les deux matrices

Résumées III

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Définition

La matrice A est appelée la *matrice des coefficients de* S, tandis que la matrice B est appelée la *matrice augmentée de* S.

Résumées IV

Définition

Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- Le premier coefficient non-nul dans la ligne $i+1$ est à droite de celui dans la ligne i.. Un tel coefficient est appelé un *pivot* de la matrice.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Résumées V

Définition

Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée réduite* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- La matrice A est échelonnée.
- Chaque pivot est égal à 1.
- Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

Question 1

Vrai/faux : Étant donné un système d'équations linéaires, alors il existe toujours une solution.

A. vrai

B. faux

Question 2

Vrai/faux : Si un système d'équations linéaires admet une solution, alors cette solution est unique.

A. vrai

B. faux

Question 3

Vrai/faux : Il existe un système d'équations linéaires qui admet exactement deux solutions.

A. vrai

B. faux

Exercice 6

(i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

(ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6, solution

Petite pause : Formation des groupes

Pendant les séances d'exercices vous serez amené·es à travailler sur des problèmes d'algèbre linéaire. Je vous demanderai de le faire par petits groupes.

Formez des groupes de 4-5 personnes.

Par groupe, apprenez à mieux connaître :

- vos camarades de classe
- la logistique du cours, où trouver les choses, comment fonctionne le cours, ...

Présentez-vous à vos camarades :

1. nom
2. sujet d'études,
3. où avez-vous obtenu votre maturité ?
4. petit 'fun fact' sur vous

Le nom de l'équipe va être distribué.

Travailler en groupe ?

Prenez 5 minutes pour réflechir ensemble sur les aspects positifs et négatifs du travail en groupe.

Avantages

-
-
-
-

Inconvénients

-
-
-
-

Inscription et contrat sur Moodle

- Inscription sur Moodle, activité "S'inscrire à un groupe".
- Remplissez le contrat d'équipe. À rendre sur Moodle comme premier “exercice” en groupe.

Exercice 7

(i) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

(ii) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7, solution

Exercice 8

Voici des matrices augmentées de quelques systèmes linéaires.

(i) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

(ii) Identifier les variables de bases et les variables libres.

(iii) Déterminer si les systèmes linéaires correspondants possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8, solution

Question 4

Considérer le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & \dots & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ deux solutions de ce système. Alors

A. $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ est aussi une solution du système.

B. $(\alpha_1 + c(\alpha_1 - \beta_1), \ldots, \alpha_n + c(\alpha_n - \beta_n))$ est aussi une solution du système pour chaque nombre réel c.

C. $(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ est aussi une solution du système.

Devoirs pour mardi prochain :

- Regarder les vidéos 1.6 - 1.8 du MOOC (regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos).
- Poser des questions sur Ed Discussion !