Durée : 60 minutes

# Algèbre linéaire
# Test intermédiaire
## CGC/EL/MX
## Automne 2025

---

## Réponses

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

$0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

$-1$ point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

$0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

$-1$ point si la réponse est incorrecte.

## Notations

– Pour une matrice $A$, $a_{ij}$ désigne l'élément situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$ de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $x_i$ désigne la $i$-ème composante de $\vec{x}$.
– $I_m$ désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$.
– $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐ $x_4 = \frac{1}{2}$ ■ $x_4 = -2$ ☐ $x_4 = 1$ ☐ $x_4 = -\frac{5}{2}$

**Question 2 :** Soit $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2 .$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ 1, 1 + t^2, t + t^2 \right\}$$

des bases de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2$ respectivement. La matrice $A$ associée à $T$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}_2$, telle que $\left[T(B)\right]_{\mathcal{C}} = A\left[B\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, satisfait

■ $a_{12} = -4$ ☐ $a_{12} = 3$ ☐ $a_{12} = -6$ ☐ $a_{12} = 2$

**Question 3 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$ ☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$
■ $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$ ☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$

**Question 4 :** Soit $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y-5z \\ -2x+y+7z \\ x-2z \end{bmatrix}.$$

Alors

☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Ker}(T)$

☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Im}(T)$

☐ le vecteur $\vec{v}$ n'est ni dans $\mathrm{Ker}(T)$, ni dans $\mathrm{Im}(T)$

■ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$ et dans $\mathrm{Ker}(T)$

**Question 5 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la factorisation $LU$ de la matrice $A$ (en utilisant *seulement* des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en *dessous*). Alors l'élément $\ell_{42}$ de la matrice $L$ est donné par

■ $\ell_{42} = -\frac{1}{4}$ ☐ $\ell_{42} = -\frac{1}{2}$ ☐ $\ell_{42} = \frac{1}{4}$ ☐ $\ell_{42} = \frac{1}{2}$

**Question 6 :** Soit $a$ un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ ax_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 1 \\ x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

☐ $a \in \{-1, 1, -2\}$ ■ $a = -2$ ☐ $a \in \{-1, 1\}$ ☐ $a \in \{-2, 1\}$

**Question 7 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice $A$ est tel que

■ $b_{24} = 3$ ☐ $b_{22} = 1$ ☐ $b_{23} = 5$ ☐ $b_{21} = 7$

**Question 8 :** Soit $W$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $2\times 2$. La deuxième coordonnée de la matrice $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in W$ dans la base $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ de $W$ est

☐ $-2$ ☐ $1$ ☐ $-\frac{3}{4}$ ■ $\frac{1}{4}$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9 :** Soient $A$ une matrice de taille $m \times n$ et $B$ une matrice de taille $n \times m$. Si $AB$ est inversible, alors $A$ et $B$ sont inversibles.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 10 :** Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 11 :** Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels et soient $T, S \colon V \to W$ deux applications linéaires.
Si $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 12 :** L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n : p(1)\,p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 13 :** Soit $V$ un espace vectoriel et soient $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ trois vecteurs de $V$. Si l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 14 :** Soient $A$ et $B$ deux matrices de taille $3 \times 3$. Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2}\det(B)^2 .$$

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 15 :** Si $A$ est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 16 :** Soit $V$ un espace vectoriel et soit $T \colon V \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ sont tels que

$$T(\vec{v}_1) = 2, \quad T(\vec{v}_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(\vec{v}_3) = 1,$$

alors $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$.

■ VRAI ☐ FAUX