

Algèbre linéaire

Test intermédiaire

CGC/EL/MX

Automne 2025

Énoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de \vec{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- \mathbb{P}_n désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- $x_4 = \frac{1}{2}$ $x_4 = -2$ $x_4 = 1$ $x_4 = -\frac{5}{2}$

Question 2 : Soit $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{1, 1+t^2, t+t^2\}$$

des bases de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et \mathbb{P}_2 respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base \mathcal{B} de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et la base \mathcal{C} de \mathbb{P}_2 , telle que $[T(B)]_{\mathcal{C}} = A[B]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, satisfait

- $a_{12} = -4$ $a_{12} = 3$ $a_{12} = -6$ $a_{12} = 2$

Question 3 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

- $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$ $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$
 $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$ $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$

Question 4 : Soit $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{bmatrix}.$$

Alors

- le vecteur \vec{v} est dans $\text{Im}(T)$, mais pas dans $\text{Ker}(T)$
 le vecteur \vec{v} est dans $\text{Ker}(T)$, mais pas dans $\text{Im}(T)$
 le vecteur \vec{v} n'est ni dans $\text{Ker}(T)$, ni dans $\text{Im}(T)$
 le vecteur \vec{v} est dans $\text{Im}(T)$ et dans $\text{Ker}(T)$

Question 5 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de la matrice A (en utilisant *seulement* des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous). Alors l'élément ℓ_{42} de la matrice L est donné par

- $\ell_{42} = -\frac{1}{4}$ $\ell_{42} = -\frac{1}{2}$ $\ell_{42} = \frac{1}{4}$ $\ell_{42} = \frac{1}{2}$

Question 6 : Soit a un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ ax_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 1 \\ x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

- $a \in \{-1, 1, -2\}$ $a = -2$ $a \in \{-1, 1\}$ $a \in \{-2, 1\}$

Question 7 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

- $b_{24} = 3$ $b_{22} = 1$ $b_{23} = 5$ $b_{21} = 7$

Question 8 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 . La deuxième coordonnée de

la matrice $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in W$ dans la base $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ de W est

- -2 1 $-\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

VRAI FAUX

Question 10 : Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

VRAI FAUX

Question 11 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soient $T, S: V \rightarrow W$ deux applications linéaires. Si $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(S)$, alors $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$.

VRAI FAUX

Question 12 : L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n : p(1)p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n .

VRAI FAUX

Question 13 : Soit V un espace vectoriel et soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ trois vecteurs de V . Si l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant.

VRAI FAUX

Question 14 : Soient A et B deux matrices de taille 3×3 . Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2.$$

VRAI FAUX

Question 15 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

VRAI FAUX

Question 16 : Soit V un espace vectoriel et soit $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ sont tels que

$$T(\vec{v}_1) = 2, \quad T(\vec{v}_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(\vec{v}_3) = 1,$$

alors $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ est dans $\text{Ker}(T)$.

VRAI FAUX