

En classe

- Soit $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs
 $\vec{v}_1 = (3, 2, 9)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 8)$, $\vec{v}_3 = (4, 1, 7)$.
 Utiliser la matrice A dont les lignes sont \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 pour calculer $\dim W$ et trouver une base de W .
 Déterminer ensuite lesquels des vecteurs suivants appartiennent à W :
 $(1, 4, 7)$, $(7, -1, 4)$, $(10, -5, 25)$, $(-5, 10, 25)$.
- Déterminer la matrice de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par
 $T(x, y, z, u) = (x + 3y - 5z + 7u, x - y + u, 3y - z)$,
 a) par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 ,
 b) par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^4 et la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 .
- Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p) = p' + 3p$.
 a) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base canonique de \mathbb{P}_2 et calculer son rang.
 b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .
 c) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.
- Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(x, y) = (2x + y, x - y, x, -x + 2y)$.
 Soit $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ une base de \mathbb{R}^4 et $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .
 La matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases \mathcal{E} de \mathbb{R}^2 et \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est
 $\square \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\square \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\square \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\square \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + 3y + 2z, y + z)$ et soit $\vec{u} = (0, 5, 1)$. Alors
 $\square \begin{matrix} \vec{u} \in \text{Im} T \\ \vec{u} \in \text{Ker} T \end{matrix}$ $\square \begin{matrix} \vec{u} \notin \text{Im} T \\ \vec{u} \in \text{Ker} T \end{matrix}$ $\square \begin{matrix} \vec{u} \in \text{Im} T \\ \vec{u} \notin \text{Ker} T \end{matrix}$ $\square \begin{matrix} \vec{u} \notin \text{Im} T \\ \vec{u} \notin \text{Ker} T \end{matrix}$
- Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
 a) Si A est une matrice non nulle de taille 5×3 , alors $\dim(\text{Lgn} A) \geq 2$.
 b) Soit A une matrice de taille $m \times n$. Si B est une matrice obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A , alors $\text{Col} B = \text{Col} A$.
 c) Soit V un espace vectoriel non nul et $T : V \rightarrow V$ est une application linéaire.
 Si $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sont tels que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, alors $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker} T$.

➡ Tourner la page s. v. p.

Test intermédiaire (chapitres 1–4, séries 1–9):

Date: mardi 18 novembre de 13h45 à 14h45

A domicile

7. Soit $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (3, 2, 8), \quad \vec{v}_2 = (5, -6, 4), \quad \vec{v}_3 = (2, 3, 7).$$
 Utiliser la matrice A dont les lignes sont \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 pour calculer $\dim W$ et trouver une base de W .
 Déterminer ensuite lesquels des vecteurs suivants appartiennent à W :
 $(1, 2, 3), \quad (1, 3, 5), \quad (1, 5, 7), \quad (8, -9, 10), \quad (9, -8, 10), \quad (10, -9, 8).$
8. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer l'équivalence suivante:
 $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \iff A^T\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.
9. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:
- a) $T : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$
 $p \mapsto p(0)$
- b) $T : M_{6,3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,6}(\mathbb{R})$
 $A \mapsto A^T$
- c) $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto \det(A)$
10. Déterminer la matrice de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z, u) = (x - 2y + 3z - 4u, x - 2u, y + z),$$
- a) par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 ,
- b) par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^4 et la base $\mathcal{B}' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 .
11. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$T(x, y, z) = (2x - 2y + 4z, 5x - 4y + 7z, 3x - 2y + 3z, x - y + 2z).$$
- a) Donner la matrice A_T de T par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 et calculer son rang.
- b) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire T .
12. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ définie par $T(p) = p' + p''$.
- a) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base canonique de \mathbb{P}_3 et calculer son rang.
- b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .
- c) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$.
13. Considérer l'application linéaire $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ donnée par

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}.$$
- a) Déterminer la matrice $A_T \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ de T par rapport à la base canonique de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- b) Déterminer la dimension et donner une base de l'image et le noyau de l'application linéaire T .
14. a) Montrer que l'application $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par

$$T(A) = A + A^T$$
 est linéaire.
- b) Déterminer la matrice $A_T \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ de T par rapport à la base canonique de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .
- Indication:* Utiliser l'exercice 4 de la série 8.