Algèbre linéaire — Série 8

CGC, EL, MX — 6 novembre 2025

En classe

1. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & & =0 \\ 2x+y & +u & =0 \end{array}\right.$$

2. Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de l'exercice 4a) de la série 7:

$$W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x=y\right\} \qquad \text{et} \qquad W_2 = \left\{(x,y,2x-y) \in \mathbb{R}^3 :\ x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

3. **a)** Calculer le rang de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Donner une base de $\mathrm{Lgn}(A)$, le sous-espace des lignes de la matrice A.

c) Donner une base de $\mathrm{Col}(A)$, le sous-espace des colonnes de la matrice A.

d) Déterminer la dimension et donner une base de $\mathrm{Nul}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les solutions du système d'équations linéaires homogènes $A\vec{x} = \vec{0}$.

4. Déterminer la dimension et donner une base de $\mathrm{Lgn}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(B)$, $\mathrm{Nul}(B)$ et $\mathrm{Col}(B)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. L'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

est:

- ☐ l'ensemble vide
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1
- ☐ un ensemble contenant un seul point
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble de polynômes $\left\{7t^2,\ 4+2t+t^2,\ at+2\right\}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$ si

☐ $a=-1$ ☐ $a=0$ ☐ $a=1$ ☐ $a=4$

7. Soit $\mathcal{B} = \left\{1-t^2, t-t^2, 2-2t+t^2\right\}$ une base de $\mathbb{P}_2$.
Le vecteur des coordonnées du polynôme $p(t) = 3-2t^2$ dans la base $\mathcal{B}$ est

☐ $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Test intermédiaire (chapitres 1–4, séries 1–9):
Date: mardi 18 novembre de 13h45 à 14h45

Série 8
Suite

---

8. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et E une matrice élémentaire de taille $m \times m$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) $\mathrm{Col}(EA) = \mathrm{Col}(A)$ **b)** $\mathrm{Lgn}(EA) = \mathrm{Lgn}(A)$ **c)** $\mathrm{Nul}(EA) = \mathrm{Nul}(A)$

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si les vecteurs ligne de la matrice A sont linéairement indépendants de même que les vecteurs colonne de A, alors la matrice A est carrée.

b) Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\mathrm{rang}(A) = m$, alors l'application linéaire $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ est injective.

c) Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que l'application linéaire $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ est surjective, alors $\mathrm{rang}(A) = m$.

A domicile

10. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y \qquad - 2u = 0 \\ x - y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

11. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel W de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les fonctions

$$f_1(x) = 1\,, \qquad f_2(x) = \cos(2x)\,, \qquad f_3(x) = \cos^2(x)\,.$$

12. **a)** Montrer que les polynômes suivants sont linéairement indépendants:

$$p_1(x) = x + 1\,, \qquad p_2(x) = x^2 + 2\,, \qquad p_3(x) = x^2 + x$$

b) Montrer que l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

c) Calculer les coefficients du polynôme $p(x) = x^2 + 5$ par rapport à cette base.

d) Compléter cette base de $\mathbb{P}_2$ pour obtenir une base de $\mathbb{P}_3$.

13. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les polynômes

$$(\lambda^2 - 1)x^3 + x, \quad x + \lambda \quad \text{et} \quad (\lambda + 1)x^3 + 1$$

sont linéairement indépendants. Est-ce qu'ils forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3$?

14. **a)** Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

b) Donner une base de $\mathrm{Lgn}(A)$.

c) Donner une base de $\mathrm{Col}(A)$.

d) Déterminer la dimension et donner une base de $\mathrm{Nul}(A)$.

15. Déterminer la dimension et donner une base de $\mathrm{Lgn}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Lgn}(B)$, $\mathrm{Nul}(B)$, $\mathrm{Col}(B)$, $\mathrm{Lgn}(C)$, $\mathrm{Nul}(C)$ et $\mathrm{Col}(C)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$