
En classe

1. Résoudre le système suivant en utilisant la règle de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

2. Calculer la matrice des cofacteurs, la matrice adjointe et la matrice inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

4. a) Montrer que les sous-ensembles

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\} \quad \text{et} \quad W_2 = \{(x, y, 2x - y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

- b) Montrer que les sous-ensembles

$$W_3 = \{(x, x - 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$$

ne sont pas des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

5. Montrer que les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes.

6. Parmi les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ \sin(a) \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$$
$$D = \left\{ \begin{bmatrix} a^2 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad E = \left\{ \begin{bmatrix} a/2 \\ 10a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

tous sauf D tous sauf B seulement C et E tous sauf B et D

7. Soit h un paramètre réel et soient

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -h \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & h \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors les matrices A_1, A_2, A_3 et A_4 sont linéairement dépendantes si et seulement si

$h = 0$ $h \in \{0, 1\}$ $h \in \{-1, 0, 1\}$ $h \in \{-1, 0\}$

➔ Tourner la page s. v. p.

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- Si A est une matrice carrée de taille 2×2 avec $\det(A) = 0$, alors une des colonnes de A est un multiple de l'autre.
 - Un plan de \mathbb{R}^3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
 - Soient $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_4$. Si les polynômes p_1, p_2 et p_3 sont linéairement indépendants, alors les polynômes $p_1 + p_2, p_2 + p_3$ et $p_3 + p_1$ sont linéairement indépendants.

A domicile

9. Montrer que si A et P sont des matrices carrées de taille $n \times n$ et P est inversible, alors
- $$\det(PAP^{-1}) = \det(A).$$
10. Montrer que si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$ alors $\det(U) = \pm 1$.
11. Résoudre le système suivant en utilisant la règle de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ -5x_1 & + & 4x_3 = 0 \\ & x_2 - x_3 & = -1 \end{cases}$$

12. Déterminer les valeurs du paramètre s pour lesquelles le système suivant

$$\begin{cases} 2sx_1 + 5x_2 = 8 \\ 6x_1 + 3sx_2 = 4 \end{cases}$$

possède une solution unique et expliciter cette solution.

13. Calculer la matrice des cofacteurs, la matrice adjointe et la matrice inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

14. Calculer les coefficients $(A^{-1})_{23}$ et $(B^{-1})_{32}$ des matrices A et B de l'exercice 10 de la série 5.

15. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

16. Parmi les sous-ensembles de \mathbb{P}_2 suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

$$W_1 = \{p \in \mathbb{P}_2 : p(0) = 1\}, \quad W_2 = \{p \in \mathbb{P}_2 : p(1) = 0\}, \quad W_3 = \{p \in \mathbb{P}_2 : p(1) = p(2)\}.$$

17. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions

$$f_1(x) = e^{\lambda x}, \quad f_2(x) = xe^{\lambda x}, \quad f_3(x) = x^2 e^{\lambda x}, \quad f_4(x) = x^3 e^{\lambda x}$$

sont linéairement indépendantes.

18. Montrer que les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes.