

**En classe**

1. Soient  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 10 & -9 \\ 0 & 24 & 5 \end{bmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$ .

- a) Calculer la factorisation  $LU$  de la matrice  $A$   
b) Utiliser cette factorisation pour résoudre l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

2. Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes et décrire l'opération élémentaire sur les lignes associée:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$    b)  $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$    c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$    d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$    e)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$    f)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -k \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ g & h & k \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

en utilisant le fait que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 5$ .

5. Calculer la factorisation  $LU$  de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ -12 & 12 & -5 & 0 & -2 \\ 9 & -8 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $L$  ainsi obtenue est telle que

$\ell_{43} = -2$      $\ell_{43} = 0$      $\ell_{43} = 3$      $\ell_{43} = 4$

6. Le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

est égal à

$-65$      $-13$      $13$      $65$

➡ Tourner la page s. v. p.

7. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- Si  $\det(A) \neq 0$ , alors la matrice  $A$  peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.
  - Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées de taille  $n \times n$ , alors  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
  - Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$ , alors  $\det(A^2) = (\det(A))^2$ .
  - Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$ , alors  $\det(A^T A) \geq 0$ .
  - Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$ , alors  $\det(-A) = -\det(A)$ .

### A domicile

8. Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .
- Montrer que si  $CA = I$  alors l'équation homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  ne possède que la solution triviale. Expliquer pourquoi dans ce cas la matrice  $A$  ne peut pas avoir plus de colonnes que de lignes.
  - Montrer que si  $AD = I$  alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistante pour chaque vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Expliquer pourquoi dans ce cas la matrice  $A$  ne peut pas avoir plus de lignes que de colonnes.

9. Soient  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & -3 \end{bmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

- Calculer la factorisation  $LU$  de la matrice  $A$
  - Utiliser cette factorisation pour résoudre l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
10. a) Calculer la factorisation  $LU$  des matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -8 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Utiliser la factorisation  $LU$  de la partie a) pour calculer les déterminants de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
11. Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

12. Soient  $a, b, c, d$  des nombres réels. Calculer le déterminant des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

13. a) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}$$

- Déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles la matrice  $A$  n'est pas inversible.