Algèbre linéaire — Série 5

CGC, EL, MX — 9 octobre 2025

En classe

1. Considérer les matrices
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Calculer (lorsque c'est possible):
$$A^2,\ AB,\ AC,\ BA,\ B^2,\ BC,\ CA,\ CB,\ C^2,\ AA^T,\ A^TA,\ BB^T,\ B^TB,\ CC^T,\ C^TC.$$

2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$
Calculer leur inverse lorsque cela est possible.

3. Parmi les matrices carrées suivantes, déterminer celles qui sont des matrices élémentaires. Décrire l'opération élémentaire associée:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
Alors le coefficient b_{21} de la matrice B est égal à

☐ $b_{21} = -4$ ☐ $b_{21} = -2$ ☐ $b_{21} = -1$ ☐ $b_{21} = 2$

5. Soient A et B deux matrices telles que le produit AB est défini.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si la matrice $AB + BA$ est définie, alors les matrices A et B sont carrées de même taille.

b) Si la première colonne de A ne contient que des zéros, alors la première colonne de AB aussi.

c) Si la première ligne de A ne contient que des zéros, alors la première ligne de AB aussi.

d) Si les colonnes de B sont linéairement dépendantes, alors les colonnes de AB le sont aussi.

e) Si les colonnes de B sont linéairement indépendantes, alors les colonnes de AB le sont aussi.

6. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $A\vec{x} = \vec{0}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $A = O$.

b) Si A, B et C sont des matrices telles que $AB = AC$, alors $B = C$.

c) Si A et B sont des matrices de taille $m \times n$ telles que $A\vec{x} = B\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $A = B$.

d) Si A est une matrice inversible, alors $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

e) Si E est une matrice élémentaire, alors E est une matrice inversible.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 5
Suite

A domicile

7. Soient

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\-2&-3&1\\0&5&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\2&1&1&0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Calculer (lorsque c'est possible):

AB, BA, AC, CA, BC, CB, $C+C^T$, AA^T, A^TA, A^TA+C, A^2, C^2, C^3, $A(C+C^2)$, $(C+C^2)^2$.

8. Trouver deux matrices A et B de taille 2×2 telles que $AB=O$ et $BA\neq O$.

9. Soit A une matrice de taille $m\times n$. Montrer les affirmations suivantes:

a) Si I_k est la matrice identité de taille $k\times k$, alors $I_mA=A$ et $AI_n=A$.

b) Si B et C sont des matrices de taille $n\times p$, alors $A(B+C)=AB+AC$.

c) Si B et C sont des matrices de taille $k\times m$, alors $(B+C)A=BA+CA$.

d) Si B est une matrice de taille $n\times p$, alors $(AB)^T=B^TA^T$.

10. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\5&2&7\\3&1&4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&5&2\\1&3&3\\1&2&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}4&1&5\\1&2&0\\0&-7&5\end{bmatrix}.$$

Calculer leur inverse lorsque cela est possible.

11. Considérer les matrices suivantes:

$$A=\begin{bmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\8&1&5\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}8&1&5\\2&-7&-1\\3&4&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\2&-7&3\end{bmatrix}$$

Trouver des matrices élémentaires E_1, E_2, E_3 et E_4 telles que

a) $E_1A=B$ **b)** $E_2B=A$ **c)** $E_3A=C$ **d)** $E_4C=A$

12. **a)** Déterminer la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&3\\2&4&5\end{bmatrix}$$

b) Utiliser la partie a) pour écrire A^{-1} comme produit de matrices élémentaires.

c) Utiliser la partie b) pour écrire A comme produit de matrices élémentaires.

13. **a)** Déterminer la matrice échelonnée-réduite R associée à la matrice

$$A=\begin{bmatrix}0&1&7&8\\1&3&3&8\\-2&-5&1&-8\end{bmatrix}$$

b) Utiliser la partie a) pour écrire la matrice A sous la forme

$$A=EFGHR,\qquad \text{où } E,\ F,\ G \text{ et } H \text{ sont des matrices élémentaires.}$$