
En classe

1. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:

a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos(x)$

b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 3$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x - 5y, 3x)$

2. Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

a) rotation $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle π dans le sens positif,

b) symétrie $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = x$.

3. Si $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux transformations, alors la *composition de S avec T*, notée $T \circ S$, est définie par

$$(T \circ S)(\vec{u}) = T(S(\vec{u})), \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^p.$$

Montrer que si S et T sont des applications linéaires, alors $T \circ S$ est aussi une application linéaire.

4. Calculer la matrice associée à chacune des applications linéaires suivantes et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives:

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (2y, 3x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (5x - y, 0)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (y, x, x - y)$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$

f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$

5. a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z, u) = (x + 3y + 5z + 7u, -x + 3y, x + 2y + 3z + 7u)$$

- b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

- c) Déterminer ensuite tous les vecteurs $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ tels que $T(x, y, z, u) = (0, 0, 0)$.

6. L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

est injective mais pas surjective

est bijective

est surjective mais pas injective

n'est ni surjective ni injective

7. L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 3y - 5z, 3x + 4y + 5z, 4x + 7y)$$

est injective mais pas surjective

est bijective

est surjective mais pas injective

n'est ni surjective ni injective

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^m .
 - Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^n et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de \mathbb{R}^m .
 - Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent \mathbb{R}^n et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
 - Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est telle que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.
 - Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

A domicile

9. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:
- $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$
 - $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, x^2)$
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - 3y)$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - z, x + y)$
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, u) \mapsto (2x + u, y - z + 1)$
10. Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
- rotation $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,
 - symétrie $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = -x$.
11. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^n et soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer que si T est injective, alors $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_k)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^m .
12. a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par
 $T(x, y, z) = (2x - 2y + 4z, 5x - 4y + 7z, 3x - 2y + 3z, x - y + 2z)$
- b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.
- c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$.
13. a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par
 $T(x, y, z) = (2x - 2y + 4z, 5x - 4y + 7z, 3x - 2y + 4z, x - y + 2z)$
- b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.
- c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$.
14. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que
- T soit surjective,
 - T soit injective,
 - T soit bijective.
15. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
- Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
 - Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.