

En classe

1. Ecrire le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2. Déterminer si les vecteurs suivants engendrent \mathbb{R}^3 :

a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants:

a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} h+6 \\ 8 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur \vec{v}_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 lorsque

$h = 3$ $h = 5$ $h = 6$ $h = 4$

5. Soient les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour quelle valeur du nombre réel b le vecteur \vec{w} appartient-il à $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

$b = -2$ $b = 1$ $b = 2$ $b = -5$

6. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

$b = 1$ $b = 2$ $b = 3$ $b = 4$

7. Soit h un paramètre réel. Les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants si et seulement si

$h = \frac{1}{2}$ $h = 0$ $h \neq \frac{1}{2}$ $h \neq 0$

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- a) Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 , alors \vec{w} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .
 - b) Si le vecteur \vec{v}_4 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , alors le vecteur \vec{v}_1 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_2 , \vec{v}_3 et \vec{v}_4 .
 - c) Si A est une matrice de taille 3×4 , alors les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^3 .
 - d) Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
 - e) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant.
 - f) Une matrice de taille 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes.
 - g) Soit A une matrice de taille $m \times n$. Si les n colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions.

A domicile

9. Ecrire le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.
10. a) Déterminer si les vecteurs
- $$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
- sont linéairement indépendants.
- b) Déterminer si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et \vec{v}_4 engendrent \mathbb{R}^3 .
11. a) Déterminer si les vecteurs
- $$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- sont linéairement indépendants.
- b) Déterminer si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et \vec{v}_4 engendrent \mathbb{R}^4 .
12. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs
- $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda + 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$$
- sont linéairement indépendants.

Réponses:

Voir site Moodle:

<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14100>
