Algèbre linéaire — Série 14

CGC, EL, MX — 18 décembre 2025

En classe

1. Diagonaliser orthogonalement la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Donner une décomposition spectrale de la matrice A.

2. Trouver la matrice symétrique associée à la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2.$$

3. **a)** Trouver la forme quadratique Q associée à la matrice symétrique de l'exercice 1.

b) Déterminer les axes principaux de Q.

c) Donner la forme diagonale de Q et classifier la forme quadratique Q.

4. Soient A une matrice de taille $m \times n$, $\vec{b}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^m$ et $\widehat{b}$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\mathrm{Col}(A)$. Alors,

- ☐ la solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés est $A^{-1}\widehat{b}$
- ☐ l'équation $A\vec{x} = \widehat{b}$ possède une solution unique
- ☐ la matrice A^TA est inversible
- ☐ chaque solution de $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés

5. La matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ peut s'écrire sous la forme $A = PDP^T$, où D est une matrice diagonale et P est la matrice orthogonale suivante:

- ☐ $P = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{8} & 0 & \sqrt{7}/\sqrt{8} \\ -\sqrt{7}/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Soit la forme quadratique Q définie par

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2\,, \qquad \text{où } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Alors les axes principaux de Q sont les colonnes de la matrice

- ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Séances de réponse aux questions:

mercredi 14 janvier 2026 – 14h30-16h30 – salle AAC 1 37 – EPFL
vendredi 16 janvier 2026 – 14h30-17h30 – salle AAC 0 14 – EPFL

7. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

   a) Si A est une matrice de taille $n \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes, alors $\mathrm{rang}(A^T A) = n$.

   b) Si A est une matrice orthogonale de taille $n \times n$ et si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, alors $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \ldots, A\vec{v}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

   c) Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes d'une matrice carrée de taille $n \times n$, alors les vecteurs propres associés sont orthogonaux.

   d) Si A est une matrice symétrique, alors la matrice A^3 peut être diagonalisée orthogonalement.

   e) Si A est la matrice d'une forme quadratique définie négative, alors $\det(A) < 0$.

A domicile

8. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$\vec{w}_1 = (3,1,0,1), \quad \vec{w}_2 = (1,2,1,1) \quad \text{et} \quad \vec{w}_3 = (-1,0,2,-1).$$

   Soit $A = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{bmatrix}$ et $\hat{x}$ la solution au sens des moindres carrés du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Calculer la projection orthogonale de $\vec{b} = (-3,-3,8,9)$ sur W à l'aide de la méthode des moindres carrés:

$$\mathrm{proj}_W \vec{b} = A\hat{x}.$$

9. Trouver la solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Indication: Utiliser la décomposition QR de la matrice A (voir exercice 15 de la série 13).

10. Soit A une matrice inversible. Montrer que si A est diagonalisable orthogonalement, alors la matrice inverse A^{-1} est aussi diagonalisable orthogonalement.

11. Diagonaliser orthogonalement les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Donner une décomposition spectrale de ces matrices.

12. Trouver les formes quadratiques associées aux matrices symétriques de l'exercice précédent. Déterminer leurs axes principaux, leur forme diagonale et les classifier.

13. Considérer la matrice inversible $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$.

   Soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ la forme quadratique associée. Montrer que

   a) Q est définie positive si et seulement si $\det(A) > 0$ et $a > 0$.

   b) Q est définie négative si et seulement si $\det(A) > 0$ et $a < 0$.

   c) Q est indéfinie si et seulement si $\det(A) < 0$.