Algèbre linéaire

CGC, EL, MX

Série 13

11 décembre 2025

En classe

1. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{x}_1 = (1,1,0)$, $\vec{x}_2 = (1,1,1)$, $\vec{x}_3 = (1,0,0)$.

2. Donner une décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indication: Utiliser l'exercice précédent.

3. Considérer le système $A\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

a) Construire le système normal associé.

b) Trouver la solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

4. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 \\ -1 & -3 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de A donne la base orthogonale

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 210 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$

5. La projection orthogonale du vecteur $\begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ sur le sous-espace engendré par la première et la deuxième colonne de la matrice A de la question précédente est le vecteur:

- ☐ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

6. La matrice A de l'exercice 4 possède une décomposition QR telle que

- [ ] $R = \begin{bmatrix} \sqrt{35} & \sqrt{35} & -\sqrt{35} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{210} \end{bmatrix}$
- [ ] $R = \begin{bmatrix} 35 & \sqrt{35} & \sqrt{35} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{210} \end{bmatrix}$
- [ ] $R = \begin{bmatrix} \sqrt{35} & \sqrt{35} & -\sqrt{35} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{210} & \sqrt{210} \end{bmatrix}$
- [ ] $R = \begin{bmatrix} 35 & 35 & -35 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -210 \end{bmatrix}$

7. Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées. Soit proj_W la projection orthogonale sur $W = \text{Col}(U)$. Alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- [ ] $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \vec{0}$
- [ ] $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \text{proj}_W\,\vec{y}$
- [ ] $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \vec{y}$
- [ ] $U^T U\vec{x} = \text{proj}_W\,\vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \text{proj}_W\,\vec{y}$

8. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

La solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est telle que

- [ ] $\hat{x}_2 = 3$
- [ ] $\hat{x}_2 = -3$
- [ ] $\hat{x}_2 = 4$
- [ ] $\hat{x}_2 = -4$

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m > n$ et sans aucune ligne nulle. Alors l'ensemble de toutes les lignes de A peut être un ensemble orthogonal.

b) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la distance entre $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Si U est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont orthogonales, alors la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ sur $\text{Col}\,U$ est égale à $UU^T\vec{y}$.

d) Si U_1 et U_2 sont deux matrices orthogonales de taille $n \times n$, alors la matrice $U_1 U_2$ est aussi une matrice orthogonale.

10. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $A^T A$ est une matrice inversible, alors A est une matrice inversible.

b) Si $A\vec{x} = \vec{b}$ est un système inconsistant, alors $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ est aussi inconsistant.

c) Si le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet uniquement la solution triviale, alors le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une unique solution au sens des moindres carrés.

d) Si A est une matrice de taille $m \times n$ et $\vec{x} \in \text{Nul}(A^T A)$, alors $A\vec{x} \in \text{Nul}(A^T)$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 13
Suite

A domicile

11. Soit U une matrice orthogonale de taille $n \times n$.

a) Montrer que $(U\vec{x}) \cdot (U\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

12. Montrer que les matrices associées aux applications linéaires de l'exercice 10 de la série 4 sont des matrices orthogonales.

13. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale du sous-espace vectoriel

$$W = \mathrm{Vect}\{(2,1,-2),(2,1,1),(-1,-1,1)\}.$$

14. Donner une décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indication: Utiliser l'exercice précédent.

15. Donner une décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Nul}(A^TA) = \mathrm{Nul}(A)$.

b) Utiliser la partie a) pour montrer que $\mathrm{rang}(A^TA) = \mathrm{rang}(A)$.

17. Considérer le système $A\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

a) Construire le système normal associé.

b) Trouver la solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

c) Trouver l'erreur correspondante.

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14100`