Algèbre linéaire — Série 12

CGC, EL, MX — 4 décembre 2025

En classe

1. Donner la dimension et trouver une base du complément orthogonal $W^\perp$ du sous-espace vectoriel

$$W = \operatorname{Vect}\{(1,0,0,1),(1,0,1,0)\}.$$

2. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1,1,1), \quad \vec{v}_2 = (1,0,-1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (1,-2,1)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (3,1,4)$ par rapport à cette base.

3. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1,0,-1), \quad \vec{v}_2 = (1,-4,1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (4,2,4)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (6,4,-2)$ par rapport à cette base.

4. Considérer les vecteurs

$$\vec{u} = (1,2,2) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = (-2,3,2)$$

a) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Calculer $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ et $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

5. Soit $W = \operatorname{Vect}\{(1,2,1),(-1,1,-1)\}$. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{y} = (2,1,3)$ sur W et déterminer la distance entre $\vec{y}$ et W.

6. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et soit $W = \operatorname{Nul}(A)$. Alors $W^\perp$ est formé des vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ dont les composantes v_1, v_2, v_3 satisfont

- ☐ $\begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases}$
- ☐ $v_1 - v_2 + v_3 = 0$
- ☐ $-v_1 + v_2 + v_3 = 0$

7. Soient $\vec{u} = (1,-2,1)$ et $\vec{v} = (-3,1,-1)$. Alors nous avons

- ☐ $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = -\frac{6}{11}\vec{u}$
- ☐ $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = -\vec{u}$
- ☐ $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = -\frac{6}{11}\vec{u}$
- ☐ $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = -\vec{v}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.

b) Si deux vecteurs sont orthonormaux, alors ils sont linéairement indépendants.

c) Si $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}-\vec{v}$.

d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors W et $W^\perp$ n'ont pas de vecteurs en commun.

e) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|\operatorname{proj}_W \vec{v}\|^2 + \|\vec{v}-\operatorname{proj}_W \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 .$$

A domicile

9. Considérer les vecteurs

$$\vec{u} = (3,-4,-1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-8,-7,4)$$

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$, et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Vérifier la validité du théorème de Pythagore.

10. Trouver une base du complément orthogonal des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

a) $W_1 = \operatorname{Vect}\{(1,2,-1)\}$

b) $W_2 = \operatorname{Vect}\{(1,1,1),(-1,1,3)\}$

11. Donner la dimension et trouver une base du complément orthogonal $W^\perp$ du sous-espace vectoriel

$$W = \operatorname{Vect}\{(1,1,1,0),(-1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}.$$

12. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (4,-4,0), \quad \vec{v}_2 = (2,2,-1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (1,1,4)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (3,-4,7)$ par rapport à cette base.

13. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1,1,1,1), \quad \vec{v}_2 = (1,-1,1,-1), \quad \vec{v}_3 = (-1,0,1,0) \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = (0,1,0,-1)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (1,2,3,4)$ par rapport à cette base.

14. Soit $W = \operatorname{Vect}\{(1,1,1,1),(-1,-1,1,1),(-1,1,-1,1)\}$. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{y} = (2,3,5,6)$ sur W et déterminer la distance entre $\vec{y}$ et W.

15. Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul donné.

a) Montrer que l'application $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ définie par

$$T(\vec{v}) = \operatorname{proj}_{\vec{x}} \vec{v}, \qquad \text{pour tout } \vec{v}\in\mathbb{R}^n,$$

est une application linéaire.

b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.