Algèbre linéaire — Série 10

CGC, EL, MX — 20 novembre 2025

En classe

1. Considérer l'espace vectoriel $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et V le sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f_1(x)=\sin(x)$ et $f_2(x)=\cos(x)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}=\{f_1,f_2\}$ est une base de V.

b) Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $\begin{aligned} T: V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.

2. Déterminer toutes les matrices de passage entre les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{E}=\big\{(1,0),(0,1)\big\},\qquad \mathcal{B}=\big\{(-1,8),(1,-7)\big\},\qquad \mathcal{C}=\big\{(1,2),(1,1)\big\}.$$

3. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

b) Déterminer la matrice de l'application linéaire associée à la matrice A:

$$T_A(x,y)=(-y,2x+3y)$$

par rapport à une base de $\mathbb{R}^2$ formée de deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

4. Soient $\mathcal{B}=\big\{(-7,9),(7,1)\big\}$ et $\mathcal{C}=\big\{(1,3),(-3,1)\big\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de passage $P^{\mathcal{CB}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ est égale à

☐ $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

5. Les valeurs propres de la matrice

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

sont

☐ 1 et 2 ☐ 1 et 3 ☐ 1, 2 et 3 ☐ 1 et 4

6. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=2$ de la matrice

$$C=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

est égale à

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Test intermédiaire (chapitres 1–4, séries 1–9):
Date: mardi 18 novembre de 13h45 à 14h45

7. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si A est une matrice inversible qui admet $\lambda = 1$ comme valeur propre, alors A^{-1} admet aussi $\lambda = 1$ comme valeur propre.

b) Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une valeur propre de A^2.

c) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre de A, alors $\vec{v}$ est un vecteur propre de A^2.

d) Si λ est une valeur propre de A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2.

e) Les matrices A et A^T possèdent les mêmes valeurs propres.

f) Si $\lambda = 0$ est une valeur propre de A, alors $\operatorname{rang} A < n$.

g) Si A est inversible et λ est une valeur propre de A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.

A domicile

8. Considérer l'espace vectoriel $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et V le sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = xe^x$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ est une base de V.

b) Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f'' - f' \end{aligned}$$

par rapport à la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.

9. Déterminer toutes les matrices de passage entre les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big\}, \\ \mathcal{B} &= \big\{(1,0,0),(0,2,1),(0,1,1)\big\}, \\ \mathcal{C} &= \big\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\big\}. \end{aligned}$$

10. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

b) Déterminer la matrice de l'application linéaire associée à la matrice A:

$$T_A(x,y) = (2x + 4y,\, 3x + 13y)$$

par rapport à une base de $\mathbb{R}^2$ formée de deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

11. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des matrices

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$