

1

Équations linéaires en algèbre linéaire

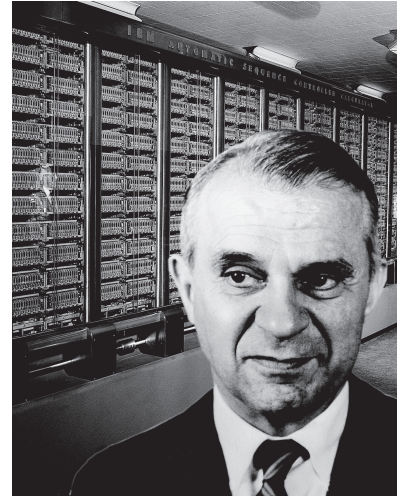
EXEMPLE INTRODUCTIF

Modèles linéaires en économie et en sciences de l'ingénieur

C'était à la fin de l'été 1949. Un professeur de l'université de Harvard, Wassily Leontief, introduisait soigneusement son dernier lot de cartes perforées dans le Mark II, l'ordinateur de l'université. Les cartes contenaient des données économiques sur les États-Unis, soit une synthèse de plus de 250 000 renseignements collectés par le Bureau des Statistiques américain et constituant le fruit de plus de deux ans de travail intense. Leontief avait divisé l'économie américaine en 500 « secteurs », comme l'industrie du charbon, l'industrie automobile, les communications, etc. Pour chacun de ces secteurs, il avait écrit une équation linéaire qui décrivait comment celui-ci distribuait sa production aux autres secteurs. Comme le Mark II, un des plus grands ordinateurs de son époque, ne pouvait traiter le système de 500 équations à 500 inconnues qu'il obtenait, Leontief avait réduit le problème à un système de 42 équations à 42 inconnues.

Programmer le Mark II pour résoudre les 42 équations de Leontief avait exigé plusieurs mois d'efforts et ce dernier s'inquiétait de savoir combien de temps l'ordinateur mettrait pour résoudre le problème. Le Mark II ronronna et clignota pendant 56 heures avant de produire finalement une solution. Nous étudierons la nature de cette solution dans les sections 1.6 et 2.6.

Leontief, qui reçut le prix Nobel d'économie en 1973, avait ouvert la voie à une nouvelle ère de la modélisation



mathématique en économie. Ses efforts à Harvard en 1949 ont conduit à l'une des premières utilisations des ordinateurs pour analyser un modèle économique à grande échelle. Depuis cette époque, des chercheurs dans beaucoup d'autres domaines ont utilisé l'informatique pour analyser des modèles mathématiques. Du fait des très grandes quantités de données en jeu, on utilise en général des modèles *linéaires*, c'est-à-dire qui sont décrits par des *systèmes d'équations linéaires* ou simplement *systèmes linéaires*.

L'importance de l'algèbre linéaire appliquée s'est accrue en proportion directe de l'augmentation de la puissance des ordinateurs, chaque nouvelle génération de matériel et de logiciels suscitant une demande de performances encore plus élevées. L'informatique est donc intimement liée à l'algèbre linéaire à travers la croissance explosive du calcul parallèle et à grande échelle.

Les scientifiques et les ingénieurs travaillent maintenant sur des problèmes bien plus complexes que ceux que l'on pouvait ne serait-ce que rêver de résoudre il y a quelques décennies. Aujourd'hui, dans bien des domaines scientifiques ou économiques, l'algèbre linéaire a pour les étudiants de premier cycle une utilité bien plus grande que n'importe quel autre sujet de mathématiques ! Cet ouvrage développe les fondements sur lesquels pourront

ensuite s'appuyer des travaux plus approfondis, et cela dans de nombreux domaines très intéressants. Voici quelques exemples. D'autres seront décrits plus loin.

- *Exploration pétrolière.* Quand un navire cherche des gisements de pétrole en pleine mer, ses ordinateurs résolvent des milliers de systèmes linéaires par jour. On obtient les données sismiques permettant d'établir ces équations par des ondes de choc sous-marines produites par des canons à air. Les ondes se réfléchissent sur les roches du sous-sol et des géophones, reliés à la poupe du navire par des câbles de plusieurs kilomètres, les mesurent.
- *Programmation linéaire.* Beaucoup de décisions de management s'appuient aujourd'hui sur des

modèles de programmation linéaire qui utilisent des centaines de variables. Les compagnies aériennes, par exemple, emploient ces méthodes pour organiser l'emploi du temps des équipages, gérer les emplacements des avions ou planifier des services techniques comme la maintenance ou les opérations dans les terminaux.

- *Réseaux électriques.* Les ingénieurs utilisent des logiciels de simulation pour concevoir des circuits électriques et des puces électroniques constituées de millions de transistors. Ces logiciels reposent sur des techniques d'algèbre linéaire et des systèmes linéaires.

WEB

Les systèmes linéaires sont au cœur de l'algèbre linéaire. Nous allons les utiliser dans ce chapitre pour introduire de façon simple et concrète certains des concepts fondamentaux de ce domaine. Les sections 1.1 et 1.2 développent une méthode systématique de résolution des systèmes linéaires. Cet algorithme sera utilisé dans les calculs tout au long de l'ouvrage. Les sections 1.3 et 1.4 montrent l'équivalence entre systèmes linéaires, *équations vectorielles* et *équations matricielles*. Cette équivalence permet de ramener des problèmes de combinaisons linéaires de vecteurs à des questions sur les systèmes linéaires. Tout au long de notre découverte de la beauté et de la puissance de l'algèbre linéaire, nous verrons que les notions fondamentales de combinaisons linéaires, d'indépendance linéaire et d'applications linéaires, étudiées dans la seconde moitié du chapitre, jouent un rôle essentiel.

1.1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

On appelle **équation linéaire** d'inconnues x_1, \dots, x_n une équation que l'on peut mettre sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

où b et les **coefficients** a_1, \dots, a_n sont des nombres réels ou complexes, dont on connaît en général la valeur. L'indice n est un entier strictement positif. Dans les exemples et les exercices de ce livre, n sera en général compris entre 2 et 5. Dans les applications pratiques, n peut valoir 50, 5 000, voire beaucoup plus.

Les deux équations

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

sont linéaires car on peut les réécrire sous la forme de l'équation (1) :

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}.$$

Les équations

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \quad \text{et} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

ne sont pas linéaires. La première contient le terme x_1x_2 , et la seconde le terme $\sqrt{x_1}$, qui ne peuvent être transformés pour obtenir la forme (1).

On appelle **système d'équations linéaires** (ou **système linéaire**) un ensemble d'une ou plusieurs équation(s) linéaire(s) aux mêmes inconnues x_1, \dots, x_n . Par exemple

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1,5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned} \quad (2)$$

On appelle **solution** du système toute liste (s_1, s_2, \dots, s_n) de nombres qui transforme chaque équation en une égalité vraie quand on substitue s_1, \dots, s_n respectivement à x_1, \dots, x_n . Par exemple, $(5; 6,5; 3)$ est solution du système (2) car, si on substitue dans (2) ces valeurs à x_1, x_2 et x_3 , on obtient respectivement $8 = 8$ et $-7 = -7$.

On appelle l'ensemble de toutes les solutions possibles **ensemble des solutions** du système linéaire. Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble de solutions, c'est-à-dire si toute solution du premier système est solution du second, et toute solution du second est solution du premier.

Trouver les solutions d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues est assez facile, puisque cela revient à déterminer l'intersection de deux droites. Considérons par exemple le système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Chacune de ces équations représente une droite, notées respectivement d_1 et d_2 . Un couple de nombres (x_1, x_2) vérifie les *deux* équations du système si et seulement si le point de coordonnées (x_1, x_2) se situe à la fois sur d_1 et d_2 . Dans le système ci-dessus, l'unique solution est le point $(3, 2)$, comme on peut le vérifier facilement (voir figure 1).

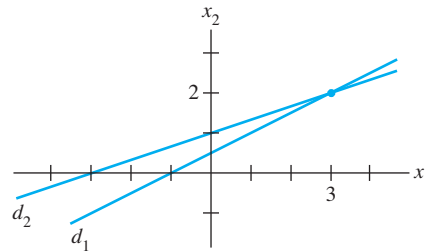


FIGURE 1 Exactement une solution

Bien entendu, deux droites ne se coupent pas nécessairement en un point unique. Elles peuvent aussi être soit parallèles, soit confondues, donc, dans ce dernier cas, se « couper » en chacun de leurs points. La figure 2 montre les représentations graphiques des deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x_1 - 2x_2 &= -1 & \text{et} & \quad \text{(b)} \quad x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 & & \quad -x_1 + 2x_2 = 1 \end{aligned}$$

Les figures 1 et 2 illustrent une propriété générale des systèmes linéaires, établie dans la section 1.2.

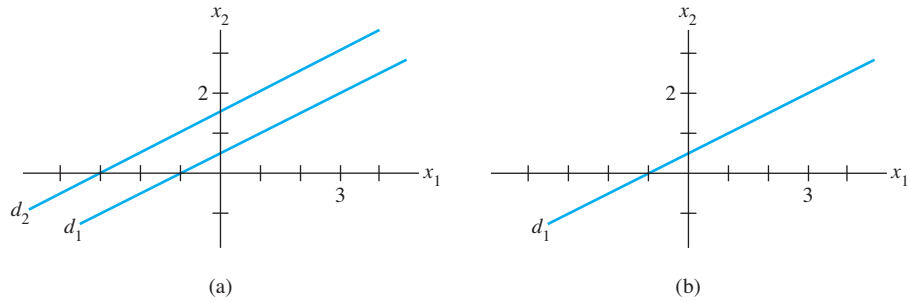


FIGURE 2 (a) Aucune solution (b) Une infinité de solutions

Un système d'équations linéaires ne peut être que dans une des trois situations suivantes :

1. soit il n'a pas de solution ;
2. soit il a exactement une solution ;
3. soit il a une infinité de solutions.

Un système linéaire est dit **compatible** (ou **consistant**) s'il admet une solution ou s'il en admet une infinité. Il est dit **incompatible** (ou **inconsistant**) s'il n'a pas de solution.

Notation matricielle

On peut présenter les informations importantes sur un système linéaire de façon concise dans un tableau rectangulaire appelé **matrice**. Étant donné le système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \tag{3}$$

où les coefficients de chaque inconnue ont été alignés verticalement, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

est appelée **matrice (des coefficients) du système (3)** et

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

matrice complète (ou **matrice augmentée**) du système (la deuxième ligne contient un 0 car la deuxième équation peut s'écrire $0 \cdot x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8$). La matrice complète d'un système s'obtient en adjoignant à la matrice du système la colonne contenant les constantes des seconds membres de chaque équation.

La **taille** d'une matrice indique son nombre de lignes et de colonnes. La matrice complète (4) ci-dessus possède 3 lignes et 4 colonnes et l'on dit que c'est une matrice 3×4 ou de type 3×4 (lire « 3-4 » ou « 3 par 4 »). Si m et n sont des entiers strictement positifs, une **matrice $m \times n$** est un tableau rectangulaire de nombres à m lignes et n colonnes (on écrit toujours en premier le nombre de lignes). Dans les exemples ci-dessous, la notation matricielle permet de simplifier les calculs.

Résolution d'un système linéaire

Cette section ainsi que la suivante décrivent un algorithme (c'est-à-dire une procédure systématique) permettant de résoudre un système linéaire. Fondamentalement, la stratégie consiste à *remplacer un système par un autre qui lui est équivalent (c'est-à-dire avec le même ensemble de solutions), plus facile à résoudre.*

Grosso modo, on utilise le terme en x_1 de la première équation pour éliminer les termes en x_1 des autres équations. Ensuite, on utilise le terme en x_2 de la deuxième équation pour éliminer les termes en x_2 des équations suivantes, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir finalement un système très simple, équivalent au système de départ.

On utilise trois opérations fondamentales pour simplifier le système : modifier une équation en lui ajoutant un multiple d'une autre équation, échanger deux équations et, pour finir, multiplier tous les termes d'une équation par une constante non nulle. On verra après le premier exemple pourquoi ces trois opérations ne modifient pas l'ensemble des solutions.

EXEMPLE 1 Résoudre le système (3).

SOLUTION La procédure d'élimination est présentée ici à la fois sous forme matricielle et sous forme non matricielle. On a disposé côte à côte les résultats de ces deux approches pour faciliter la comparaison.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & & \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & & \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

On conserve x_1 dans la première équation et on l'élimine dans les autres. Pour cela, on ajoute 4 fois la première équation à la troisième. Avec un peu d'entraînement, on finit en général par effectuer ce type de calcul de tête.

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot [\text{équation 1}] : & 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 & \\ + [\text{équation 3}] : & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & \\ \hline [\text{nouvelle équation 3}] : & -3x_2 + 13x_3 = -9 & \end{array}$$

On écrit alors le résultat à la place de la troisième équation :

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & & \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & & \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Ensuite, on multiplie l'équation 2 par $1/2$ pour obtenir 1 comme coefficient de x_2 (ce qui simplifiera les opérations arithmétiques dans l'étape suivante) :

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & & \\ x_2 - 4x_3 = 4 & & \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 & & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

On utilise le terme en x_2 de l'équation 2 pour éliminer le terme $-3x_2$ de l'équation 3. Le calcul mental correspond à ceci :

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot [\text{équation 2}] : & 3x_2 - 12x_3 = 12 & \\ + [\text{équation 3}] : & -3x_2 + 13x_3 = -9 & \\ \hline [\text{nouvelle équation 3}] : & x_3 = 3 & \end{array}$$

Le nouveau système a alors une forme *triangulaire*¹ :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

On pourrait éliminer le terme $-2x_2$ dans l'équation 1, mais il est plus efficace d'utiliser d'abord x_3 dans l'équation 3 pour éliminer les termes $-4x_3$ et $+x_3$ dans les équations 2 et 1. Les calculs mentaux sont

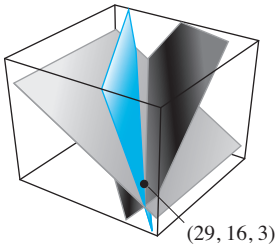
$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot [\text{éq. 3}] : & 4x_3 = 12 & -1 \cdot [\text{éq. 3}] : \quad -x_3 = -3 \\ + [\text{éq. 2}] : & x_2 - 4x_3 = 4 & + [\text{éq. 1}] : \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \hline [\text{nouvelle éq. 2}] : & x_2 = 16 & \hline [\text{nouvelle éq. 1}] : & x_1 - 2x_2 = -3 \end{array}$$

On combine en général ces deux calculs en un seul :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3 \\ x_2 &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maintenant que l'on a éliminé tous les termes au-dessus du x_3 de l'équation 3, on revient à x_2 dans l'équation 2 et on l'utilise pour éliminer le $-2x_2$ au-dessus. Grâce aux calculs précédents, x_3 n'intervient plus. On ajoute 2 fois l'équation 2 à l'équation 1 et on obtient :

$$\begin{cases} x_1 & = 29 \\ x_2 & = 16 \\ x_3 & = 3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Chacune des équations initiales détermine un plan dans un espace à trois dimensions. Le point $(29, 16, 3)$ appartient aux trois plans.

L'essentiel est maintenant fait. On voit que l'unique solution du système initial est le triplet $(29, 16, 3)$. Après ces nombreux calculs intermédiaires, il est toutefois bon de prendre l'habitude de vérifier la solution. Pour s'assurer que $(29, 16, 3)$ est effectivement solution, on substitue ces valeurs dans le premier membre du système initial et on calcule :

$$\begin{aligned} (29) - 2(16) + (3) &= 29 - 32 + 3 = 0 \\ 2(16) - 8(3) &= 32 - 24 = 8 \\ -4(29) + 5(16) + 9(3) &= -116 + 80 + 27 = -9 \end{aligned}$$

Le résultat correspond au second membre du système initial, donc $(29, 16, 3)$ est bien solution du système. ■

L'exemple 1 montre comment des opérations sur des équations d'un système linéaire correspondent à des opérations analogues sur les lignes de sa matrice complète. Les trois opérations élémentaires citées ci-dessus correspondent aux opérations suivantes sur la matrice complète.

¹ Le terme intuitif de *triangulaire* sera remplacé par un mot plus précis dans la section suivante.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES

1. (Remplacement) Remplacer une ligne par la ligne obtenue en lui ajoutant un multiple d'une autre ligne.
2. (Échange) Échanger deux lignes.
3. (Multiplication par un scalaire) Multiplier tous les coefficients d'une ligne par une constante non nulle.

On peut appliquer ces opérations sur les lignes à n'importe quelle matrice, et pas uniquement aux matrices complètes associées à un système linéaire. Deux matrices sont dites **équivalentes selon les lignes**² si l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Il est important de noter que les opérations sur les lignes sont *réversibles*. Si l'on échange deux lignes, on peut retrouver la matrice initiale en effectuant de nouveau l'échange. Si l'on multiplie une ligne par une constante non nulle c , alors on retrouve la ligne d'origine en multipliant la nouvelle ligne par $1/c$. Considérons enfin une opération de remplacement entre deux lignes (par exemple les lignes 1 et 2) et supposons que l'on ait ajouté à la deuxième ligne le produit de la première ligne par c , obtenant ainsi une nouvelle deuxième ligne. Pour inverser cette opération, il suffit d'ajouter à la (nouvelle) deuxième ligne le produit de la première par $-c$ (voir les exercices 29 à 32 à la fin de cette section).

Intéressons-nous pour l'instant plus spécifiquement aux opérations sur les lignes de la matrice complète d'un système linéaire. Supposons que l'on ait transformé un système linéaire par des opérations sur les lignes. En considérant chaque type d'opération élémentaire, on voit que toute solution du système initial est solution du nouveau système. Inversement, comme on peut déduire le système initial du nouveau système par une suite d'opérations élémentaires, toute solution du nouveau système est solution du système initial. Ces remarques justifient l'énoncé ci-dessous.

Deux systèmes linéaires dont les matrices sont équivalentes selon les lignes admettent le même ensemble de solutions.

Les calculs de l'exemple 1 peuvent paraître assez longs, mais avec un peu d'entraînement, ils vont en fait assez vite. Les exemples et exercices ci-après ont été choisis de façon que les opérations sur les lignes s'effectuent facilement, ce qui permet au lecteur de se concentrer sur les concepts sous-jacents. Il est toutefois indispensable d'apprendre à effectuer ces opérations avec précision car elles seront utilisées tout au long de l'ouvrage.

La fin de cette section montre comment on peut utiliser les opérations sur les lignes pour déterminer la taille de l'ensemble des solutions, sans avoir à résoudre entièrement le système.

² La présentation traditionnelle de l'algèbre linéaire en France différant sensiblement de celle proposée ici, certaines notions y sont bien moins usitées. C'est la raison pour laquelle certains éléments de vocabulaire ne sont pas totalement stabilisés en français. (Ndt)

Problèmes d'existence et d'unicité

Nous verrons dans la section 1.2 pourquoi un système linéaire peut n'admettre aucune solution, en admettre une seule ou en admettre une infinité. Pour déterminer la nature de l'ensemble des solutions d'un système linéaire, il faudra répondre aux deux questions ci-dessous.

DEUX QUESTIONS FONDAMENTALES À PROPOS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

1. Le système est-il compatible ? Autrement dit, *existe-t-il* au moins une solution ?
2. Si une solution existe, est-elle *la seule* ? Autrement dit, la solution est-elle *unique* ?

Ces deux questions apparaîtront sous des formes diverses tout au long du livre. Cette section et la suivante montrent comment y répondre à l'aide d'opérations sur les lignes.

EXEMPLE 2 Étudier la compatibilité du système suivant :

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

SOLUTION Il s'agit du système de l'exemple 1. Supposons que l'on ait effectué les opérations sur les lignes qui aboutissent à la forme triangulaire

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\x_2 - 4x_3 &= 4 \\x_3 &= 3\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

À ce stade du calcul, on connaît la valeur de x_3 . Si, dans l'équation 2, on substituait à x_3 sa valeur, on pourrait calculer x_2 et ainsi déterminer x_1 à l'aide de l'équation 1. Il existe donc une solution, et le système est compatible (en réalité, comme x_3 a une seule valeur possible, l'équation 2 détermine x_2 de façon unique, donc l'équation 1 détermine x_1 de façon unique ; la solution est unique). ■

EXEMPLE 3 Étudier la compatibilité du système suivant :

$$\begin{aligned}x_2 - 4x_3 &= 8 \\2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1\end{aligned} \tag{5}$$

SOLUTION La matrice complète est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour avoir un terme en x_1 dans la première équation, on échange les lignes 1 et 2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour éliminer le terme $5x_1$ dans la troisième équation, on ajoute $-5/2$ fois la ligne 1 à la ligne 3 :

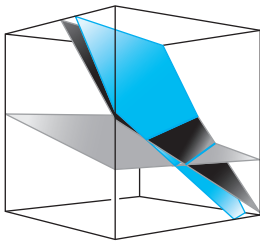
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

On utilise ensuite le terme en x_2 de la deuxième équation pour éliminer $-(1/2)x_2$ dans la troisième. On ajoute donc $1/2$ fois la ligne 2 à la ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La matrice complète est maintenant sous forme triangulaire. Pour l'interpréter, on revient à la notation sous forme d'équations :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0 &= 5/2 \end{aligned} \quad (8)$$



Ce système est incompatible car aucun point n'appartient aux trois plans.

L'équation $0 = 5/2$ est une forme simplifiée de $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5/2$. Ce système triangulaire contient une contradiction évidente. Aucune valeur de x_1 , x_2 et x_3 ne peut satisfaire (8) puisque l'équation $0 = 5/2$ n'est jamais vérifiée. Et comme (8) et (5) ont le même ensemble de solutions, le système initial est incompatible (c'est-à-dire qu'il n'a pas de solution). ■

La dernière ligne de la matrice de (7) est typique de ce que l'on obtient quand on a réduit un système incompatible à une forme triangulaire.

REMARQUE NUMÉRIQUE

Dans les problèmes réels, on résout les systèmes linéaires à l'aide d'ordinateurs. Si la matrice du système est carrée, les logiciels utilisent presque toujours l'algorithme d'élimination présenté ici et dans la section 1.2, en le modifiant légèrement pour améliorer la précision.

La grande majorité des techniques de résolution de problèmes d'algèbre linéaire rencontrés dans le monde des affaires ou de l'industrie est fondée sur l'*arithmétique en virgule flottante*. On représente les nombres sous forme décimale $\pm 0, d_1 \cdots d_p \times 10^r$, où r est un entier et où le nombre p de chiffres après la virgule est en général compris entre 8 et 16. Comme le résultat doit être tronqué ou arrondi pour correspondre au nombre de chiffres que l'on peut conserver, les calculs en virgule flottante sont en général approchés. On rencontre aussi des erreurs d'arrondi quand il faut entrer un nombre tel que $1/3$ dans l'ordinateur, puisque sa représentation décimale doit être approchée par un nombre comportant un nombre fini de chiffres. Mais, heureusement, les imprécisions de l'arithmétique en virgule flottante posent assez rarement de gros problèmes. Les encadrés « Remarque numérique » de ce livre sont destinés à avertir le lecteur de difficultés qui pourraient éventuellement se présenter plus tard dans sa carrière.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Tout au long de l'ouvrage, il est conseillé d'essayer de résoudre les exercices d'entraînement avant de travailler sur les autres exercices. Les solutions sont données après chaque série d'exercices.

1. Décrire par une phrase la première opération élémentaire sur les lignes qu'il faudrait effectuer pour résoudre le système [plusieurs réponses sont possibles dans le (a)].

a. $x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12$ $x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4$ $5x_3 - x_4 = 7$ $x_3 + 3x_4 = -5$	b. $x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$ $x_2 + 8x_3 = -4$ $2x_3 = 3$ $x_4 = 1$
---	---

2. On a transformé la matrice complète d'un système linéaire en la matrice ci-dessous au moyen d'opérations sur les lignes. Ce système est-il compatible ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Le triplet $(3, 4, -2)$ est-il solution du système ci-dessous ?

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

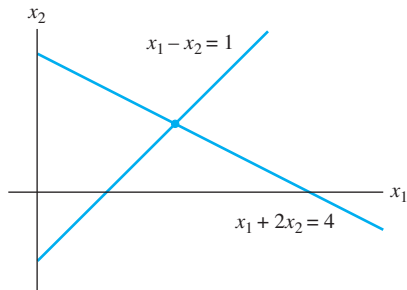
4. Pour quelles valeurs de h et k le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ -6x_1 + 3x_2 &= k \end{aligned}$$

1.1 EXERCICES

Résoudre les systèmes des exercices 1 à 4 au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes effectuées soit sur les équations, soit sur la matrice complète. On suivra la procédure systématique d'élimination décrite dans la présente section.

1. $x_1 + 5x_2 = 7$	2. $3x_1 + 6x_2 = -3$
$-2x_1 - 7x_2 = -5$	$5x_1 + 7x_2 = 10$



3. Déterminer le point (x_1, x_2) , intersection des deux droites d'équations respectives $x_1 + 2x_2 = 4$ et $x_1 - x_2 = 1$ (voir figure).

4. Déterminer le point (x_1, x_2) , intersection des deux droites d'équations respectives $x_1 + 2x_2 = -13$ et $3x_1 - 2x_2 = 1$.

On suppose que les matrices des exercices 5 et 6 sont les matrices complètes d'un système linéaire. Dans chaque cas, décrire par une phrase les deux premières opérations élémentaires sur les lignes à effectuer dans la procédure de résolution du système.

5.
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

6.
$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dans les exercices 7 à 10, on a réduit la matrice complète d'un système linéaire à la forme indiquée au moyen d'opérations sur les lignes. Dans chaque cas, donner les opérations qui restent à effectuer et décrire l'ensemble des solutions du système.

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Résoudre les systèmes linéaires des exercices 11 à 14.

$$11. \begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$12. \begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$13. \begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\ x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$14. \begin{aligned} 2x_1 - 6x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Sans effectuer la résolution complète, étudier la compatibilité des systèmes des exercices 15 et 16.

$$15. \begin{aligned} x_1 - 6x_2 &= 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ -x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$16. \begin{aligned} 2x_1 - 4x_4 &= -10 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

17. Les trois droites d'équations respectives $2x_1 + 3x_2 = -1$, $6x_1 + 5x_2 = 0$ et $2x_1 - 5x_2 = 7$ ont-elles un point commun ? Expliquer.

18. Les trois plans d'équations respectives $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4$, $x_2 - 2x_3 = -2$ et $2x_1 + 3x_2 = 0$ ont-ils au moins un point commun ? Expliquer.

Dans les exercices 19 à 22, déterminer la ou les valeur(s) de h telle(s) que la matrice soit la matrice complète d'un système linéaire compatible.

$$19. \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$20. \begin{bmatrix} 1 & h & -5 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$21. \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{bmatrix}$$

$$22. \begin{bmatrix} -4 & 12 & h \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dans les exercices 23 et 24, certains des principaux énoncés de cette section du cours ont été soit cités tels quels, soit légèrement reformulés (tout en restant vrais), soit modifiés de façon à les rendre faux dans certains cas. Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux et *justifier* la réponse. Si l'énoncé est vrai, identifier l'endroit dans le texte où un résultat similaire apparaît, ou citer précisément une définition ou un théorème correspondant. Si l'énoncé est faux, indiquer un résultat énoncé ou utilisé de façon incorrecte, ou citer un contre-exemple qui montre qu'il peut être faux. On trouvera par la suite de nombreux autres exercices comme celui-ci, de type « vrai-faux ».

23. a. Toute opération élémentaire sur les lignes est réversible.
 b. Une matrice 5×6 a six lignes.
 c. Une **solution** d'un système linéaire d'inconnues x_1, \dots, x_n est un n -uplet (s_1, s_2, \dots, s_n) de nombres qui transforme chaque équation en une égalité vraie quand on substitue s_1, \dots, s_n respectivement à x_1, \dots, x_n .
 d. Il existe deux questions fondamentales sur un système linéaire concernant les notions d'existence et d'unicité.
24. a. Deux matrices sont équivalentes selon les lignes si elles possèdent le même nombre de lignes.
 b. Des opérations élémentaires sur la matrice complète d'un système linéaire ne changent jamais l'ensemble des solutions du système.
 c. Deux systèmes linéaires équivalents peuvent avoir des ensembles de solutions distincts.
 d. Un système linéaire compatible a une ou plusieurs solution(s).
25. Déterminer une relation entre g , h et k de façon que le système ci-dessous soit compatible.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

26. On suppose que le système ci-dessous est compatible quelles que soient les valeurs de f et g . Que peut-on dire des coefficients c et d ? Justifier la réponse.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

27. On suppose que a , b , c et d sont des constantes telles que a soit non nul et que le système suivant soit compatible quelles que soient les valeurs de f et g . Que peut-on dire des coefficients a , b , c et d ? Justifier la réponse.

$$ax_1 + bx_2 = f$$

$$cx_1 + dx_2 = g$$

28. Construire trois matrices complètes de différents systèmes linéaires dont l'ensemble des solutions correspond à $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ et $x_3 = -1$.

Dans les exercices 29 à 32, déterminer les opérations élémentaires sur les lignes qui transforment la première matrice en la seconde, puis déterminer l'opération inverse qui transforme la seconde en la première.

29. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

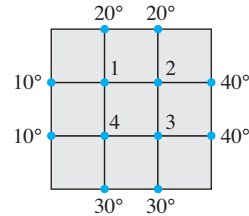
31. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

Parmi les problèmes importants que pose l'étude des transferts thermiques figure celui de la répartition de la température à l'état stationnaire d'une plaque fine dont la température aux bords est

fixée. On suppose que la plaque de la figure ci-dessous est la section d'une tige métallique ; on néglige le flux de chaleur dans la direction perpendiculaire à la plaque. Soit T_1, \dots, T_4 les températures aux quatre nœuds intérieurs du quadrillage de la figure. La température en un nœud est à peu près égale à la moyenne des températures aux quatre nœuds voisins (au-dessus, à gauche à droite et en dessous)³. On a par exemple

$$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4, \text{ soit } 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$



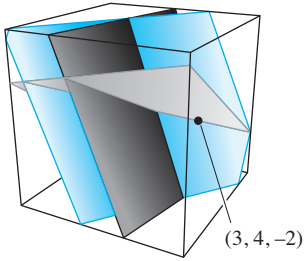
33. Écrire un système de quatre équations dont la solution donne l'estimation des températures T_1, \dots, T_4 .
34. Résoudre le système d'équations de l'exercice 33. [Indication : pour simplifier le calcul, on pourra échanger les lignes 1 et 4 avant de commencer les opérations du type « remplacement ».]

³ Voir Frank M. White, *Heat and Mass Transfer*, Reading, MA : Addison-Wesley Publishing, 1991, p. 145 à 149.

SOLUTIONS DES EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1. a. Pour le calcul « à la main », le mieux est d'échanger d'abord les équations 3 et 4. On peut aussi multiplier l'équation 3 par $1/5$ ou encore ajouter à l'équation 4 $-1/5$ fois la ligne 3. En tout cas, il serait très maladroit de chercher à éliminer le $4x_2$ de l'équation 1 à l'aide du x_2 de l'équation 2. Il faut auparavant avoir obtenu une forme triangulaire et avoir éliminé les termes en x_3 et en x_4 dans les deux premières équations.
 - b. Le système est sous forme triangulaire. La simplification suivante concerne le x_4 de la quatrième équation. On l'utilise pour éliminer tous les termes en x_4 au-dessus de lui. La bonne opération à effectuer maintenant est d'ajouter 2 fois la quatrième équation à la première (après cela, on passe à l'équation 3 : on multiplie par $1/2$ et l'on utilise l'équation ainsi transformée pour éliminer les termes en x_3 au-dessus).
2. Le système correspondant à la matrice complète est

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 4x_2 - 7x_3 &= 2 \\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$



Comme le point $(3, 4, -2)$ vérifie les deux premières équations, il appartient à la droite d'intersection des deux premiers plans. Mais comme il ne vérifie pas les trois équations, il n'appartient pas aux trois plans à la fois.

La troisième équation donne $x_3 = 0$, qui correspond bien entendu à une valeur autorisée pour x_3 . Après élimination des termes en x_3 dans les équations 1 et 2, on peut sans problème terminer la résolution et obtenir une unique valeur pour x_2 et x_1 . Il existe donc une solution, et elle est unique. On comparera cette situation à celle de l'exemple 3.

3. Il est très simple de vérifier qu'une liste de nombres donnée est solution. On pose $x_1 = 3, x_2 = 4$ et $x_3 = -2$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} 5(3) - (4) + 2(-2) &= 15 - 4 - 4 = 7 \\ -2(3) + 6(4) + 9(-2) &= -6 + 24 - 18 = 0 \\ -7(3) + 5(4) - 3(-2) &= -21 + 20 + 6 = 5 \end{aligned}$$

Les deux premières équations sont vérifiées, mais pas la troisième, donc $(3, 4, -2)$ n'est pas solution du système. On remarque la présence des parenthèses dans l'expression des substitutions. Leur usage est fortement recommandé afin d'éviter des erreurs de calcul.

4. Si l'on ajoute trois fois la première équation à la seconde, le système devient

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ 0 &= k + 3h \end{aligned}$$

Si $k + 3h$ est non nul, il n'y a pas de solution. Le système est compatible pour toutes les valeurs de h et k telles que $k + 3h = 0$.

1.2 MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS ET FORMES ÉCHELONNÉES

Dans cette section, on précise la méthode de la section 1.1 pour mettre en place un algorithme de réduction, appelé méthode du pivot de Gauss ou méthode d'élimination de Gauss-Jordan, et permettant d'analyser n'importe quel système d'équations linéaires⁴. En nous restreignant à la première partie de cet algorithme, nous pourrions répondre à la question fondamentale, posée dans la section 1.1, de l'existence et de l'unicité d'une solution.

L'algorithme s'applique à n'importe quelle matrice, qu'elle s'interprète ou non comme la matrice complète d'un système linéaire. La première partie de cette section concerne donc une matrice rectangulaire quelconque et commence par la définition d'une classe importante de matrices, qui comprend les matrices « triangulaires » de la section 1.1. Dans les définitions ci-dessous, on appelle ligne ou colonne non nulle une ligne ou une colonne contenant au moins un coefficient non nul. On appelle **coefficient principal**⁵ d'une ligne non nulle le coefficient non nul le plus à gauche dans la ligne.

⁴ Des mathématiciens chinois utilisaient une méthode analogue d'élimination dans les systèmes linéaires aux alentours de l'an 250 av. J.-C. Le procédé est resté inconnu des savants occidentaux jusqu'à sa découverte au XIX^e siècle par le célèbre mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss. Un ingénieur allemand, Wilhelm Jordan, rendit l'algorithme célèbre dans un article de géodésie publié en 1888.

⁵ Voir note 2 p. 7. (NdT)

DÉFINITION

Une matrice rectangulaire est dite **sous forme échelonnée** (ou **sous forme échelonnée en ligne**) si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Toutes les lignes non nulles sont au-dessus de toutes les lignes nulles.
2. Le coefficient principal de chaque ligne se trouve dans une colonne située à droite de celle du coefficient principal de la ligne au-dessus d'elle.
3. Tous les coefficients situés dans une colonne en dessous d'un coefficient principal sont nuls.

Une matrice qui vérifie en outre les deux conditions ci-dessous est dite **sous forme échelonnée réduite** (ou **sous forme échelonnée en ligne réduite**) :

4. Le coefficient principal de toute ligne non nulle est égal à 1.
5. Les coefficients principaux (égaux à 1) sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

On appelle **matrice échelonnée** (respectivement **matrice échelonnée réduite**) une matrice qui est sous forme échelonnée (respectivement sous forme échelonnée réduite). La propriété 2 signifie que les coefficients principaux sont disposés selon des *échelons* (ou en escaliers) qui se déplacent vers le bas et la droite au fur et à mesure que l'on descend dans la matrice. La propriété 3 est une conséquence immédiate de la propriété 2, mais on l'a ajoutée pour insister sur ce résultat.

Les matrices « triangulaires » de la section 1.1 comme

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

sont sous forme échelonnée. La seconde est même sous forme échelonnée réduite. On propose d'autres exemples ci-dessous.

EXEMPLE 1 Les matrices ci-dessous sont sous forme échelonnée. Les coefficients principaux (■) peuvent avoir n'importe quelle valeur non nulle ; les coefficients marqués (*) peuvent avoir n'importe quelle valeur (nulle ou non).

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Les matrices ci-dessous sont sous forme échelonnée réduite car leurs coefficients principaux sont égaux à 1 et ont des 0 en dessous *et au-dessus* d'eux.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Toute matrice non nulle peut être réduite selon les lignes (c'est-à-dire transformée par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes) en au moins une matrice échelonnée, mais cette réduction n'est pas unique car différentes suites d'opérations sont

possibles. En revanche, la forme échelonnée réduite que l'on obtient à partir d'une matrice donnée est unique. Le théorème ci-dessous est démontré dans l'annexe A, à la fin du livre.

THÉORÈME 1

Unicité de la forme échelonnée réduite

Toute matrice est équivalente selon les lignes à une et une seule matrice échelonnée réduite.

Si une matrice A est équivalente selon les lignes à une matrice échelonnée U , on appelle U **forme échelonnée** (ou forme échelonnée en ligne) **de** A ; si U est sous forme échelonnée réduite, on l'appelle **forme échelonnée réduite de** A . [La plupart des logiciels ou des calculatrices possédant des fonctions matricielles utilisent l'abréviation RREF pour « forme échelonnée réduite en ligne » (en anglais *Reduced Row Echelon Form*). On trouve parfois REF (*Row Echelon Form*, forme échelonnée en ligne).]

Positions de pivot

Une fois qu'une matrice a été réduite à une forme échelonnée, les opérations que l'on effectue par la suite pour aboutir à la forme échelonnée réduite ne modifient pas la position des coefficients principaux. Comme la forme échelonnée réduite d'une matrice est unique, *les coefficients principaux d'une matrice échelonnée obtenue à partir d'une matrice donnée sont toujours situés à la même position*. Ces coefficients principaux correspondent aux coefficients principaux (des 1 par définition) de la forme échelonnée réduite.

DÉFINITION

On appelle **position de pivot** d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A . On appelle **colonne pivot** une colonne de A contenant une position de pivot.

Dans l'exemple 1, les carrés (■) correspondent aux positions de pivot. De nombreux concepts fondamentaux étudiés dans les quatre premiers chapitres sont liés d'une façon ou d'une autre aux positions de pivot d'une matrice.

EXEMPLE 2 Réduire la matrice A ci-dessous à une forme échelonnée et déterminer les colonnes pivots de A .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

SOLUTION Le principe est le même que dans la section 1.1. Le haut de la colonne non nulle la plus à gauche correspond à la première position de pivot. Il faut placer un coefficient non nul (le *pivot*) à cette position. On a intérêt ici à échanger les lignes 1 et 4. On amène ainsi un 1 en position de pivot, ce qui évite les fractions dans l'étape suivante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

← Pivot
← Colonne pivot

On fait apparaître des 0 en dessous du pivot, 1, en ajoutant aux lignes inférieures des multiples de la première ligne et l'on obtient ainsi la matrice (1) ci-dessous. La position de pivot de la deuxième ligne doit être aussi à gauche que possible, soit, ici, dans la deuxième colonne. On choisit donc comme pivot le coefficient 2 qui est à cet emplacement.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{1}$$

← Nouvelle colonne pivot

On ajoute $-5/2$ fois la ligne 2 à la ligne 3, et $3/2$ fois la ligne 2 à la ligne 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

La matrice dans (2) ne ressemble à aucune de celles que l'on avait rencontrées dans la section 1.1. Il est impossible de faire apparaître un coefficient principal dans la colonne 3 ! Il n'est pas question d'utiliser les lignes 1 ou 2 car on détruirait alors la disposition en échelons des coefficients principaux obtenus auparavant. En revanche, on peut faire apparaître un coefficient principal dans la colonne 4 en échangeant les lignes 3 et 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{de la forme :} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

← Colonnes pivots

Cette matrice est sous forme échelonnée, ce qui permet d'affirmer que les colonnes 1, 2 et 4 sont des colonnes pivots.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \tag{3}$$

← Positions de pivot
← Colonnes pivots

L'exemple 2 illustre la notion de **pivot**, qui est un nombre non nul en position de pivot, utilisé pour faire apparaître des 0 au moyen d'opérations sur les lignes. Dans l'exemple 2, les pivots sont 1, 2 et -5 . On remarque que ces nombres ne sont pas les

coefficients de A correspondant aux positions de pivot qui apparaissent en couleurs dans (3).

En se guidant sur l'exemple 2, nous allons maintenant décrire une procédure effective pour transformer une matrice en une matrice échelonnée, réduite ou non. Le lecteur est invité dès maintenant à étudier soigneusement et à maîtriser cette procédure. Cet effort initial sera largement récompensé par la suite.

L'algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme qui suit comporte quatre étapes et conduit à une matrice sous forme échelonnée. Une cinquième étape permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite. L'algorithme est illustré sur un exemple.

EXEMPLE 3 À l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les matrices, mettre la matrice ci-dessous d'abord sous forme échelonnée, puis sous forme échelonnée réduite.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

SOLUTION

ÉTAPE 1

On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne pivot. La position de pivot est en haut de cette colonne.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

← Colonne pivot

ÉTAPE 2

On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position de pivot.

On échange les lignes 1 et 3 (on aurait pu également échanger les lignes 1 et 2).

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

← Pivot

ÉTAPE 3

Au moyen d'opérations de remplacement, on fait apparaître des 0 à toutes les positions situées sous le pivot.

On pourrait préalablement diviser la première ligne par le pivot 3. Mais comme la colonne 1 comporte deux fois le nombre 3, il est aussi simple d'ajouter -1 fois la ligne 1 à la ligne 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

← Pivot

ÉTAPE 4

On cache (ou on ignore) la ligne contenant la position de pivot et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle. On applique les étapes 1 à 3 à la sous-matrice restante. On répète le processus jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune ligne non nulle à modifier.

Si l'on cache la ligne 1, on voit en appliquant l'étape 1 que la colonne 2 est la colonne pivot suivante. Pour appliquer l'étape 2, on choisit comme pivot le « haut » de cette colonne.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

← Nouvelle colonne pivot

Pour l'étape 3, on pourrait introduire une étape facultative qui consisterait à diviser la ligne supérieure de la sous-matrice par le pivot, 2. Mais on peut aussi directement ajouter $-3/2$ fois la ligne supérieure à la ligne juste en dessous. On obtient alors

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Si l'on cache la ligne contenant la deuxième position de pivot pour l'étape 4, on se retrouve avec une nouvelle sous-matrice formée d'une seule ligne.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

← Pivot

Les étapes 1 à 3 sont sans objet pour cette sous-matrice, et l'on est parvenu à une forme échelonnée de la matrice initiale. Si l'on veut la forme échelonnée réduite, il faut effectuer une étape supplémentaire.

ÉTAPE 5

On fait apparaître des 0 au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un pivot est différent de 1, on divise sa ligne par la valeur du pivot pour obtenir la valeur 1.

Le pivot le plus à droite est à la ligne 3. On fait apparaître des 0 au-dessus de lui en ajoutant aux lignes 1 et 2 des multiples convenables de la ligne 3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Ligne 1} + (-6) \cdot \text{ligne 3} \\ \leftarrow \text{Ligne 2} + (-2) \cdot \text{ligne 3} \end{array}$$

Le pivot suivant est à la ligne 2. On transforme sa valeur en 1 en divisant cette ligne par le pivot.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{On multiplie la ligne par } \frac{1}{2}.$$

On fait apparaître un 0 dans la colonne 2 en ajoutant 9 fois la ligne 2 à la ligne 1.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Ligne 1} + (9) \cdot \text{ligne 2}$$

Pour finir, on divise la ligne 1 par la valeur du pivot, 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{On multiplie la ligne par } \frac{1}{3}.$$

Et voilà la forme échelonnée réduite de la matrice initiale. ■

L'ensemble des opérations correspondant aux étapes 1 à 4 est appelé **phase de descente** de l'algorithme du pivot. L'étape 5, qui conduit à l'unique forme échelonnée réduite, est appelée **phase de remontée**.

REMARQUE NUMÉRIQUE

Dans l'étape 2 décrite ci-dessus, un programme informatique choisit en général comme pivot le coefficient de la colonne le plus grand en valeur absolue. Cette méthode, appelée **stratégie du pivot partiel**, est celle qui produit le moins d'erreurs d'arrondi.

Solutions d'un système linéaire

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice complète d'un système linéaire, on arrive directement à la description de son ensemble de solutions.

Supposons, par exemple, que la matrice complète d'un système linéaire ait été mise sous la forme échelonnée *réduite*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système comporte trois inconnues puisque la matrice complète a quatre colonnes. Le système linéaire associé est

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Les inconnues x_1 et x_2 , correspondant aux colonnes pivots de la matrice, sont appelées **inconnues principales**. La dernière inconnue, x_3 , est appelée **inconnue secondaire** ou **variable libre** ou tout simplement **inconnue non principale**.

À chaque fois que, comme dans (4), un système est compatible, on peut décrire explicitement son ensemble des solutions en résolvant le système d'équations *réduit*, ce qui revient à exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues non principales. Cela est possible parce que, dans la forme échelonnée réduite, chaque inconnue principale figure dans une et une seule équation. Dans (4), on résout la première équation à l'inconnue x_1 et la deuxième à l'inconnue x_2 (on ne tient évidemment pas compte de la troisième équation, qui n'introduit aucune contrainte supplémentaire sur les inconnues).

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ quelconque} \end{cases} \quad (5)$$

La locution « x_3 quelconque » signifie que l'on peut choisir arbitrairement n'importe quelle valeur pour x_3 . Une fois cette valeur choisie, les formules (5) déterminent de façon unique les valeurs de x_1 et x_2 . Par exemple, pour $x_3 = 0$, la solution est $(1, 4, 0)$; pour $x_3 = 1$, la solution est $(6, 3, 1)$. *Des choix distincts pour x_3 déterminent des solutions distinctes du système, et toute solution du système est déterminée par un choix de x_3 .*

EXEMPLE 4 Déterminer la solution générale du système dont on a réduit la matrice complète à

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

SOLUTION La matrice est sous forme échelonnée, mais la résolution nécessite la forme échelonnée réduite. Cette réduction est détaillée ci-dessous. Le symbole \sim placé avant une matrice signifie qu'elle est équivalente selon les lignes à la matrice qui la précède.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le système comporte cinq inconnues car la matrice complète a six colonnes. Le nouveau système associé est

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 4x_4 &= 5 \\ x_5 &= 7 \end{aligned} \quad (6)$$

Les colonnes pivots de la matrice sont 1, 3 et 5, donc les inconnues principales sont x_1 , x_3 et x_5 . Les inconnues restantes, x_2 et x_4 , peuvent avoir une valeur quelconque. On résout par rapport aux inconnues principales et l'on obtient la solution générale

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ quelconque} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ quelconque} \\ x_5 = 7 \end{cases} \quad (7)$$

On remarque que la valeur de x_5 est déjà fixée par la troisième équation du système (6).

Représentation paramétrique de l'ensemble des solutions

Les relations obtenues en (5) et en (7) constituent des *représentations paramétriques* des ensembles de solutions, dans lesquelles les inconnues non principales jouent le rôle de paramètres. *Résoudre un système* revient à trouver une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions ou à montrer que l'ensemble des solutions est vide.

Quand un système est compatible et comporte des inconnues non principales, plusieurs représentations paramétriques de l'ensemble des solutions sont possibles. Par exemple, dans le système (4), on peut ajouter 5 fois l'équation 2 à l'équation 1 et obtenir ainsi le système équivalent

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 21 \\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

On pourrait considérer x_2 comme un paramètre, exprimer x_1 et x_3 en fonction de x_2 , et on aurait ainsi une description tout aussi exacte de l'ensemble des solutions. Cependant, par souci de cohérence, on adoptera désormais pour convention (arbitraire) de choisir les inconnues non principales comme paramètres pour représenter un ensemble de solutions (les corrigés des exercices, données en fin d'ouvrage, respectent cette convention).

Quand un système est incompatible, l'ensemble des solutions est vide même si le système comporte des inconnues non principales. Dans ce cas, il n'existe *aucune* représentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Résolution par substitutions successives

Considérons le système ci-dessous, dont la matrice complète est sous forme échelonnée *non réduite* :

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 10 \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= -5 \\ x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Plutôt que de calculer la forme échelonnée réduite, un programme informatique résoudrait ce système par remontée, en commençant par la dernière équation et en substituant aux inconnues les valeurs obtenues au fur et à mesure. Plus précisément, le programme résoudrait l'équation 3 en exprimant x_4 en fonction de x_5 , substituerait l'expression de x_4 dans l'équation 2, puis résoudrait l'équation 2 en x_2 ; il substituerait ensuite les expressions de x_2 et x_4 dans l'équation 1 qu'il résoudrait finalement en x_1 .

La présentation matricielle de la phase de remontée dans la méthode du pivot nécessite le même nombre d'opérations arithmétiques que la méthode par substitutions successives. Mais quand on effectue le calcul à la main, il est préférable de s'astreindre à la présentation matricielle, ce qui diminue le risque d'erreur. La meilleure stratégie consiste à n'utiliser que la forme échelonnée *réduite* pour résoudre un système !

REMARQUE NUMÉRIQUE

En général, la phase de descente de la méthode du pivot prend beaucoup plus de temps que la remontée. On mesure habituellement un algorithme de résolution d'un système en flops (*floating point operations*, opérations en virgule flottante). Un **flop** est une opération arithmétique (+, −, *, /) entre deux réels représentés en virgule flottante⁶. Pour une matrice $n \times (n + 1)$, la réduction à une forme échelonnée peut nécessiter jusqu'à $2n^3/3 + n^2/2 - 7n/6$ flops (soit environ $2n^3/3$ flops dès que n est suffisamment grand, typiquement $n \geq 30$). En revanche, les opérations restant à effectuer pour parvenir à la forme réduite nécessitent au maximum n^2 flops.

Problèmes d'existence et d'unicité

Une forme échelonnée non réduite n'a pas grande utilité à elle seule pour résoudre un système. C'est en revanche l'outil le plus adapté pour répondre aux deux questions fondamentales formulées dans la section 1.1.

EXEMPLE 5 Étudier l'existence et l'unicité d'une solution au système

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

SOLUTION On a déterminé à l'exemple 3 une forme échelonnée de la matrice complète du système :

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Les inconnues principales sont x_1 , x_2 et x_5 , et les inconnues non principales x_3 et x_4 . Aucune des équations n'étant du type $0 = 1$, ce qui signifierait une incompatibilité du système, on peut donc remonter le système par substitution. Mais sans avoir à expliciter tout le calcul, l'existence d'une solution au système (8) est claire. Par ailleurs, la solution n'est *pas unique* car le système comporte des inconnues non principales. Différentes valeurs de x_3 et x_4 déterminent des solutions différentes. Le système admet donc une infinité de solutions.

Si un système est sous forme échelonnée et qu'il ne comporte aucune équation de la forme $0 = b$, avec b non nul, alors toute équation non nulle contient une inconnue principale affectée d'un coefficient non nul. Dans ce cas, soit les inconnues principales sont complètement déterminées (il n'y a pas d'inconnues secondaires), soit l'une au moins des inconnues principales s'exprime en fonction d'une ou plusieurs inconnues non principales. Dans le premier cas, il existe une unique solution ; dans le second cas, il en existe une infinité (une pour chaque choix de valeur des inconnues non principales).

Ces remarques justifient le théorème suivant.

⁶ Traditionnellement, un *flop* était uniquement défini comme une multiplication ou une division, car l'addition et la soustraction prenaient beaucoup moins de temps et pouvaient être négligées. Mais du fait des progrès effectués en architecture des ordinateurs, on préfère maintenant adopter la définition du *flop* proposée ici (voir Golub et Van Loan, *Matrix Computations*, 2^e éd., Baltimore : The Johns Hopkins Press, 1989, p. 19 et 20).

THÉORÈME 2

Théorème d'existence et d'unicité

Un système linéaire est compatible si et seulement si la colonne de droite de la matrice complète *n'est pas* une colonne pivot, c'est-à-dire si et seulement si une forme échelonnée de la matrice complète n'a *aucune ligne* de la forme

$$[0 \ \cdots \ 0 \ b] \quad \text{avec } b \text{ non nul.}$$

Si un système linéaire est compatible, alors l'ensemble des solutions contient soit (i) une solution unique, s'il n'existe pas d'inconnues secondaires, soit (ii) une infinité de solutions, s'il existe au moins une inconnue secondaire.

La procédure ci-dessous montre comment trouver et décrire toutes les solutions d'un système.

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

1. Écrire la matrice complète du système.
2. Appliquer la méthode du pivot pour obtenir une matrice complète équivalente sous forme échelonnée. Déterminer si le système est compatible. S'il n'y a pas de solutions, c'est terminé ; sinon, aller à l'étape suivante.
3. Continuer la méthode du pivot pour obtenir la forme échelonnée réduite.
4. Écrire le système d'équations correspondant à la matrice obtenue à l'étape 3.
5. Réécrire chaque équation non nulle issue de l'étape 4 de façon à exprimer son unique inconnue principale en fonction des inconnues non principales apparaissant dans l'équation.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1. Déterminer la solution générale du système linéaire dont la matrice complète est

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la solution générale du système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

1.2 EXERCICES

Dans les exercices 1 et 2, indiquer les matrices qui sont sous forme échelonnée réduite ainsi que, parmi celles qui ne le sont pas, celles qui sont seulement sous forme échelonnée.

$$1. \text{ a. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d. } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Réduire les matrices des exercices 3 et 4 à la forme échelonnée réduite par la méthode du pivot. Entourer les positions de pivot dans la matrice réduite ainsi que dans la matrice initiale, et préciser les colonnes pivots.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

5. Décrire toutes les formes échelonnées possibles d'une matrice 2×2 non nulle. On utilisera les symboles ■, * et 0, sur le modèle de la première partie de l'exemple 1.

6. Reprendre l'exercice 5 avec une matrice 3×2 non nulle.

Déterminer la solution générale des systèmes dont la matrice complète est donnée dans les exercices 7 à 14.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ -3 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 12 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 15 et 16, on utilise pour les matrices échelonnées les notations de l'exemple 1. On suppose que chaque matrice est la matrice complète d'un système linéaire. Déterminer dans chaque cas si le système est compatible. Dans le cas où il l'est, étudier l'unicité de la solution.

15. a. $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$

16. a. $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$

Dans les exercices 17 et 18, déterminer la ou les valeur(s) de h telle(s) que la matrice proposée soit la matrice complète d'un système linéaire compatible.

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 19 et 20, choisir des valeurs pour h et k de façon que le système (a) n'ait pas de solution, (b) ait une unique solution, (c) ait plusieurs solutions. On donnera une réponse séparée pour chacune de ces trois questions.

19. $x_1 + hx_2 = 2$ 20. $x_1 - 3x_2 = 1$
 $4x_1 + 8x_2 = k$ $2x_1 + hx_2 = k$

Dans les exercices 21 et 22, dire si les affirmations proposées sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse⁷.

21. a. Dans certains cas, à partir d'une matrice donnée, la méthode du pivot peut aboutir à différentes matrices échelonnées réduites selon le choix des opérations élémentaires effectuées.
 b. On ne peut appliquer la méthode du pivot qu'à des matrices complètes de systèmes linéaires.
 c. Une inconnue principale est une inconnue qui correspond à une colonne pivot dans la matrice des coefficients du système.
 d. Il revient au même de trouver une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système et de résoudre le système.
 e. Si l'une des lignes d'une forme échelonnée d'une matrice complète est $[0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0]$, alors le système associé est incompatible.
22. a. La forme échelonnée réduite d'une matrice est unique.
 b. Si toutes les colonnes d'une matrice complète contiennent un pivot, alors le système correspondant est compatible.
 c. Les positions de pivot d'une matrice dépendent du fait que l'on ait ou non utilisé des échanges de lignes pendant le processus de réduction.
 d. La solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.
 e. Si un système possède des inconnues non principales, alors il a plusieurs solutions.
23. On suppose que toutes les colonnes de la matrice des coefficients d'un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues contiennent un pivot. Expliquer pourquoi le système a une unique solution.

⁷ Des exercices vrai/faux de ce type sont proposés dans beaucoup de sections. La façon de justifier les réponses est expliquée avant les exercices 23 et 24 de la section 1.1.

24. On suppose que la matrice *complète* d'un système linéaire est une matrice 3×5 dont la cinquième colonne n'est pas une colonne pivot. Le système est-il compatible ? Pourquoi ?
25. On suppose que chaque ligne de la matrice des coefficients d'un système linéaire contient une position de pivot. Expliquer pourquoi le système est compatible.
26. On suppose que la matrice des *coefficients* d'un système linéaire est une matrice 3×5 contenant trois colonnes pivots. Le système est-il compatible ? Pourquoi ?
27. Reformuler la dernière phrase du théorème 2 en utilisant le concept de colonne pivot : « Si un système linéaire est compatible, alors la solution est unique si et seulement si _____ . »
28. À quelle condition sur les colonnes pivots de sa matrice complète un système linéaire a-t-il une et une seule solution ?
29. On appelle parfois un système linéaire avec moins d'équations que d'inconnues un système *sous-déterminé*. Un tel système peut-il avoir une unique solution ? Expliquer.
30. Donner un exemple d'un système sous-déterminé incompatible de deux équations à trois inconnues.
31. On appelle parfois un système linéaire avec plus d'équations que d'inconnues un système *surdéterminé*. Un tel système peut-il être compatible ? Illustrer la réponse par un exemple de trois équations à deux inconnues.
32. On réduit une matrice $n \times (n + 1)$ à sa forme échelonnée réduite par la méthode du pivot. Parmi les opérations (flops) utilisées au total, quelle est approximativement la proportion consacrée à la phase de remontée si $n = 20$? si $n = 200$?

On considère des données expérimentales représentées par un ensemble de points du plan. On appelle **polynôme d'interpolation**

de ces données un polynôme dont le graphe passe par chacun des points. En calcul scientifique, on peut par exemple utiliser ces polynômes pour estimer une valeur entre deux données expérimentales. On peut les utiliser aussi en infographie pour créer des courbes. L'une des méthodes pour déterminer un polynôme d'interpolation consiste à résoudre un système linéaire.

WEB

33. Déterminer le polynôme d'interpolation $p(t)$ aux points $(1, 6)$, $(2, 15)$ et $(3, 28)$. Autrement dit, déterminer a_0, a_1 et a_2 tels que
- $$a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 6$$
- $$a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 15$$
- $$a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = 28$$

34. [M] On a mesuré en soufflerie la force que la résistance de l'air exerçait sur un projectile à différentes vitesses :

Vitesse (10 m/s)	0	2	4	6	8	10
Force (100 N)	0	2,90	14,8	39,6	74,3	119

Déterminer un polynôme d'interpolation correspondant à ces données et estimer la force sur un projectile lancé à 75 m/s. On cherchera un polynôme de degré inférieur ou égal à 5 sous la forme $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$. Que se passe-t-il si l'on cherche un polynôme de degré strictement inférieur à 5 (on pourra par exemple essayer avec un polynôme de degré 3)⁸.

⁸ Les exercices marqués du symbole [M] sont conçus pour être résolus à l'aide d'un « programme Matriciel » (un logiciel tel que MATLAB[®], Maple[™], Mathematica[®], MathCad[®] ou Derive[™], ou une calculatrice programmable dotée de fonctions matricielles, comme celles fabriquées par Texas Instruments ou Hewlett-Packard).

SOLUTIONS DES EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1. La forme échelonnée réduite de la matrice complète et le système correspondant sont

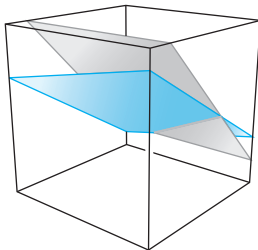
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 9 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x_1 et x_2 , et la solution générale est

$$\begin{cases} x_1 = 9 + 2x_3 \\ x_2 = 3 - x_3 \\ x_3 \text{ quelconque} \end{cases}$$

Remarque : il est essentiel que la solution générale décrive chaque inconnue, celles qui jouent le rôle de paramètres étant clairement identifiées. Les relations ci-dessous ne décrivent *pas* l'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} x_1 = 9 + 2x_3 \\ x_2 = 3 - x_3 \\ x_3 = 3 - x_2 \end{cases} \quad \text{Solution incorrecte}$$



La solution générale du système d'équations est la droite d'intersection de deux plans.

Cette formulation implique que x_2 et x_3 sont *toutes les deux* des inconnues principales, ce qui n'est sûrement pas le cas.

2. On applique la méthode du pivot.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice montre que le système est *incompatible* car sa colonne de droite est une colonne pivot ; la troisième ligne correspond à l'équation $0 = 5$. Il est inutile de continuer la réduction. On remarque que, vu l'incompatibilité du système, la présence d'inconnues non principales est sans conséquence dans cet exemple.

1.3 ÉQUATIONS VECTORIELLES

D'importantes propriétés des systèmes linéaires peuvent être interprétées à l'aide du concept de vecteur. Cette section établit un lien entre les systèmes linéaires et certaines équations portant sur des vecteurs. Le terme de *vecteur* apparaît dans des contextes mathématiques ou physiques très variés, qui seront abordés au chapitre 4, *Espaces vectoriels*. D'ici là, *vecteur* signifiera *liste ordonnée de nombres*. Cette conception assez simple permet d'accéder aussi rapidement que possible à un certain nombre d'applications intéressantes et importantes.

Vecteurs de \mathbb{R}^2

Une matrice à une seule colonne est appelée **vecteur colonne** ou, plus simplement, **vecteur**. Les coefficients constituant un vecteur sont appelés **composantes**. Voici par exemple quelques vecteurs à deux composantes :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

où w_1 et w_2 sont des réels quelconques. L'ensemble des vecteurs à deux éléments est noté \mathbb{R}^2 (lire « r-deux » ou « r au carré »). La notation \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels qui apparaissent comme composantes dans les vecteurs, et l'exposant 2 signifie que chaque vecteur contient deux composantes⁹.

Deux vecteurs de \mathbb{R}^2 sont dits **égaux** si leurs composantes correspondantes sont égales. Ainsi, les vecteurs $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ne sont *pas* égaux car des vecteurs de \mathbb{R}^2 sont des paires *ordonnées* de réels.

Étant donné deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^2 , leur **somme** est le vecteur $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ obtenu en additionnant les composantes correspondantes de \mathbf{u} et \mathbf{v} . Par exemple, on a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

⁹ Dans cet ouvrage, il sera essentiellement question de vecteurs et de matrices à coefficients réels. Mais tous les théorèmes et définitions des chapitres 1 à 5 et de la plupart des autres chapitres s'appliquent sans difficulté à des coefficients complexes. Des vecteurs et des matrices complexes apparaissent par exemple naturellement en électricité.

Étant donné un vecteur \mathbf{u} et un réel c , le **produit** de \mathbf{u} par c est le vecteur $c\mathbf{u}$ obtenu en multipliant toutes les composantes de \mathbf{u} par c . Par exemple,

$$\text{si } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ et } c = 5, \quad \text{alors } c\mathbf{u} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Le nombre c dans $c\mathbf{u}$ est appelé un **scalaire**. Il s'écrit en caractère maigre pour le distinguer du \mathbf{u} écrit en caractère gras. Les vecteurs \mathbf{u} et $c\mathbf{u}$ sont dits **colinéaires**.

On peut, comme dans l'exemple ci-dessous, combiner les opérations d'addition et de multiplication.

EXEMPLE 1 On pose $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$. Calculer les vecteurs $4\mathbf{u}$, $(-3)\mathbf{v}$ et $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$.

SOLUTION

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

et

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Pour des raisons pratiques (et pour économiser de la place), on écrira parfois un vecteur colonne tel que $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ sous la forme $(3, -1)$. Dans ce cas, les parenthèses et la virgule¹⁰ permettent de distinguer le vecteur $(3, -1)$ de $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$, qui est une matrice 1×2 et s'écrit avec des crochets et sans virgule. Ainsi, on a

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

car, bien qu'ayant les mêmes éléments, ces matrices n'ont pas la même forme.

Interprétation géométrique de \mathbb{R}^2

On considère un système de coordonnées cartésiennes dans le plan. Puisque tout point est entièrement déterminé par une liste ordonnée de deux points, *on peut identifier le point du plan de coordonnées (a, b) avec le vecteur colonne $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$* . On peut donc considérer \mathbb{R}^2 comme l'ensemble des points du plan (voir figure 1).

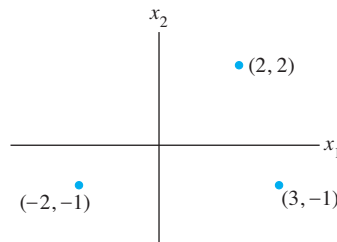


FIGURE 1 Vecteurs vus comme des points

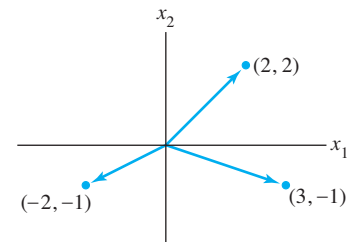


FIGURE 2 Vecteurs avec des flèches

¹⁰ Ou le point-virgule s'il existe un risque de confusion avec la virgule décimale. (NdT)

On visualise souvent plus facilement l'interprétation géométrique d'un vecteur tel que $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ en le représentant par une flèche (segment de droite orienté) allant de l'origine $(0, 0)$ vers le point $(3, -1)$, comme indiqué sur la figure 2. On ne donne dans ce cas aucune signification particulière aux points situés sur la flèche¹¹.

La somme de deux vecteurs s'interprète sans difficulté géométriquement. On peut vérifier la règle ci-dessous par un calcul de géométrie analytique.

Règle du parallélogramme pour l'addition

Si l'on représente deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^2 par des points du plan, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ correspond au quatrième sommet du parallélogramme dont les autres sommets sont \mathbf{u} , $\mathbf{0}$ et \mathbf{v} (voir figure 3).

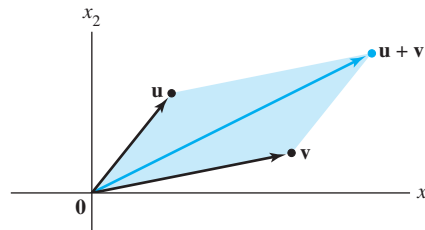


FIGURE 3 Règle du parallélogramme

EXEMPLE 2 La figure 4 représente les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, ainsi que leur somme $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. ■

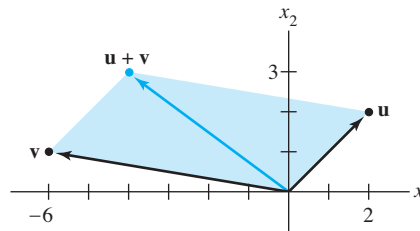


FIGURE 4

L'exemple suivant illustre le fait que l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul fixé est une droite passant par l'origine $(0, 0)$.

EXEMPLE 3 Soit $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Représenter sur un dessin les vecteurs \mathbf{u} , $2\mathbf{u}$ et $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$.

SOLUTION Se référer à la figure 5 qui représente les vecteurs \mathbf{u} , $2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ ainsi que $-\frac{2}{3}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. La flèche correspondant à $2\mathbf{u}$ est deux fois plus longue que pour \mathbf{u} ,

¹¹ En physique, les flèches représentent des forces et peuvent en général se déplacer librement dans l'espace. Cette interprétation des vecteurs sera analysée dans la section 4.1.

et les deux flèches pointent dans la même direction. La flèche correspondant à $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$ a une longueur égale aux deux tiers de celle pour \mathbf{u} , et les flèches pointent dans des directions opposées. De façon générale, la longueur de la flèche pour $c\mathbf{u}$ est égale à $|c|$ fois la longueur de la flèche pour \mathbf{u} . [On rappelle que la longueur du segment de droite joignant $(0, 0)$ à (a, b) est $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ce point sera examiné plus loin dans le chapitre 6.]

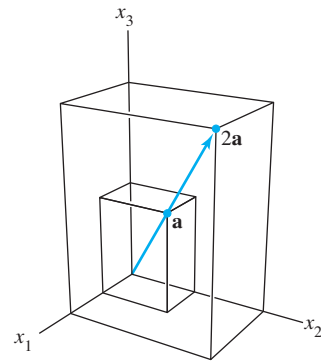


FIGURE 6
Vecteurs colinéaires

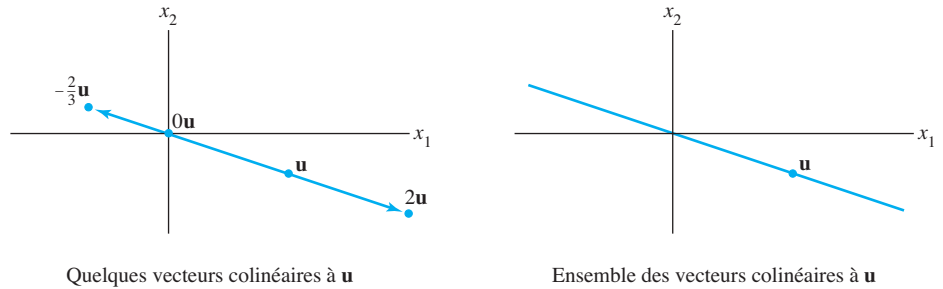


FIGURE 5

Vecteurs de \mathbb{R}^3

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 sont des matrices colonnes 3×1 avec trois éléments. Ils s'interprètent géométriquement comme des points dans un espace à trois dimensions, munis parfois, pour plus de clarté, de flèches partant de l'origine. La figure 6 représente les

vecteurs $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $2\mathbf{a}$.

Vecteurs de \mathbb{R}^n

Si n est un entier strictement positif, \mathbb{R}^n (lire « r-n ») désigne l'ensemble de toutes les listes ordonnées (ou n -uplets) de n réels, que l'on écrit en général sous forme de matrices colonnes $n \times 1$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

On appelle **vecteur nul** le vecteur dont tous les éléments sont nuls et on le note $\mathbf{0}$ (le nombre de composantes de $\mathbf{0}$ est déterminé par le contexte).

On définit l'égalité des vecteurs de \mathbb{R}^n ainsi que les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire comme dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire composante par composante. Ces opérations possèdent les propriétés suivantes, que l'on vérifie directement à partir des propriétés correspondantes des réels (voir le problème d'entraînement 1 ainsi que les exercices 33 et 34 en fin de section).

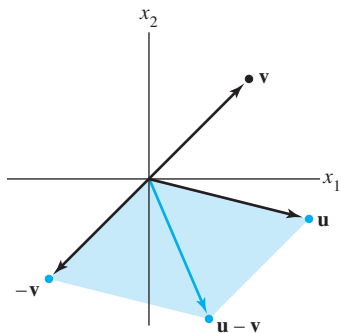


FIGURE 7
Différence de deux vecteurs

Propriétés algébriques de \mathbb{R}^n

Quels que soient les vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{v} et \mathbf{w} de \mathbb{R}^n ainsi que les scalaires c et d :

- | | |
|--|--|
| (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ |
| (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ |
| (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (vii) $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$ |
| (iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
où $-\mathbf{u}$ désigne $(-1)\mathbf{u}$ | (viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |

Pour simplifier les notations, un vecteur tel que $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ est noté $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. La figure 7 montre la construction de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ comme somme de \mathbf{u} et de $-\mathbf{v}$.

Combinaisons linéaires

Étant donné des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ de \mathbb{R}^n et des scalaires c_1, c_2, \dots, c_p , le vecteur \mathbf{y} défini par

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$, les scalaires c_1, \dots, c_p étant appelés **coefficients** de la combinaison linéaire. La propriété (ii) ci-dessus permet d'omettre les parenthèses dans l'écriture d'une telle combinaison. Les coefficients d'une combinaison linéaire peuvent être des réels quelconques, éventuellement nuls. Voici quelques exemples de combinaisons linéaires de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 :

$$\sqrt{3}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 \quad (= \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{0} \quad (= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2)$$

EXEMPLE 4 La figure 8 montre quelques combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Les droites parallèles formant le quadrillage passent par des multiples entiers de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Estimer les combinaisons linéaires de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 qui correspondent aux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{w} .

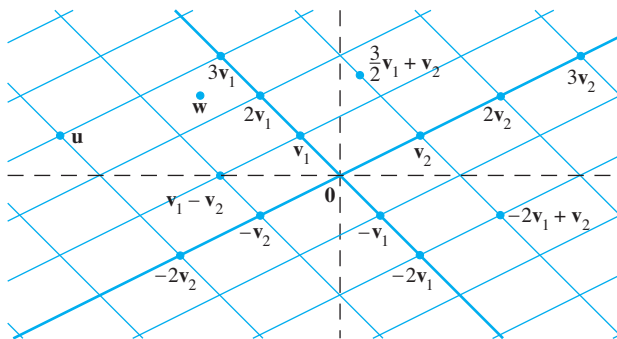


FIGURE 8 Combinaisons linéaires de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2

SOLUTION La règle du parallélogramme montre que \mathbf{u} est la somme de $3\mathbf{v}_1$ et $-2\mathbf{v}_2$; autrement dit,

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2.$$

On peut interpréter cette expression de \mathbf{u} comme une suite d'instructions pour aller de l'origine au point \mathbf{u} en suivant des chemins rectilignes. On parcourt d'abord trois

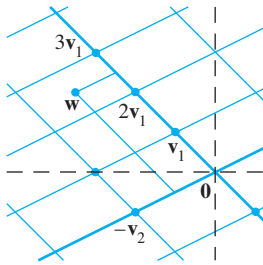


FIGURE 9

unités dans la direction de \mathbf{v}_1 pour arriver à $3\mathbf{v}_1$, puis -2 unités dans la direction de \mathbf{v}_2 (parallèlement à la droite joignant $\mathbf{0}$ à \mathbf{v}_2). Quant au vecteur \mathbf{w} , bien qu'il ne soit pas situé sur le quadrillage, il semble être à peu près à mi-chemin de deux points de la grille, au sommet d'un parallélogramme défini par $(5/2)\mathbf{v}_1$ et $(-1/2)\mathbf{v}_2$ (voir figure 9). Une estimation raisonnable de \mathbf{w} est donc

$$\mathbf{w} = \frac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2. \quad \blacksquare$$

L'exemple suivant établit un lien entre un problème concernant les combinaisons linéaires et la question fondamentale d'existence étudiée dans les sections 1.1 et 1.2.

EXEMPLE 5 On pose $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Le vecteur \mathbf{b} peut-il être écrit comme combinaison linéaire de \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 ? Autrement dit, existe-t-il des coefficients x_1 et x_2 tels que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b} ? \quad (1)$$

Si elle(s) existe(nt), déterminer la ou les solution(s) de l'équation (1).

SOLUTION En utilisant les définitions de la multiplication par un scalaire et de l'addition de vecteurs, on écrit l'équation vectorielle

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Les deux vecteurs de chaque côté de l'égalité (2) sont égaux si et seulement si les éléments correspondants sont égaux. Autrement dit, x_1 et x_2 vérifient l'équation vectorielle (1) si et seulement si x_1 et x_2 sont solutions du système

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned} \quad (3)$$

Pour résoudre ce système, on applique la méthode du pivot à la matrice complète en écrivant¹² :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¹²Le symbole \sim entre les matrices désigne l'équivalence selon les lignes (voir section 1.2).

La solution de (3) est $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$. Ainsi, \mathbf{b} est combinaison linéaire de \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , avec les coefficients $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$. Autrement dit, on a

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

On remarque que dans l'exemple 5, les vecteurs initiaux \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 et \mathbf{b} sont les colonnes de la matrice complète que nous avons transformée en matrice échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}$

Si, pour abrégé, on écrit cette matrice en mettant simplement le nom de ses colonnes, c'est-à-dire

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}] \tag{4}$$

alors on voit clairement que l'on peut écrire la matrice complète directement à partir des vecteurs de l'équation (1), sans passer par les étapes intermédiaires de l'exemple 5. Il suffit de prendre les vecteurs dans l'ordre où ils apparaissent dans l'équation (1) et de les mettre dans les colonnes d'une matrice comme dans (4).

On peut donc facilement généraliser ce qui précède et énoncer ceci.

Une équation vectorielle

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

a le même ensemble de solutions que le système dont la matrice complète est

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}]. \tag{5}$$

En particulier, on peut écrire \mathbf{b} comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ si et seulement si le système linéaire correspondant à la matrice (5) admet au moins une solution.

En algèbre linéaire, l'une des principales questions qui se posent est l'étude de l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'un ensemble donné de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$.

DÉFINITION

Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ est noté¹³ $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ et appelé **partie de \mathbb{R}^n engendrée par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$** . Autrement dit, $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_p \mathbf{v}_p$$

où c_1, \dots, c_p sont des scalaires.

¹³ L'exemple 3 de la section 2.8 justifie cette notation. (NDT)

Dire qu'un vecteur \mathbf{b} appartient à $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ revient à dire que l'équation vectorielle

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{b}$$

a au moins une solution ou, de façon équivalente, que le système linéaire de matrice complète $[\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_p \ \mathbf{b}]$ a au moins une solution.

On remarque que $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ contient tous les vecteurs colinéaires à \mathbf{v}_1 (par exemple), puisque $c\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_p$. En particulier, le vecteur nul appartient nécessairement à $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$.

Interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\mathbf{v}\}$ et $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$

Soit \mathbf{v} un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 . Alors $\text{Vect}\{\mathbf{v}\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs colinéaires à \mathbf{v} , qui n'est autre que l'ensemble des points de la droite de \mathbb{R}^3 joignant \mathbf{v} à $\mathbf{0}$ (voir figure 10).

De même, si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 , non colinéaires, $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est le plan de \mathbb{R}^3 contenant \mathbf{u} , \mathbf{v} et $\mathbf{0}$. En particulier, $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contient la droite de \mathbb{R}^3 joignant \mathbf{u} à $\mathbf{0}$ ainsi que la droite joignant \mathbf{v} à $\mathbf{0}$ (voir figure 11).

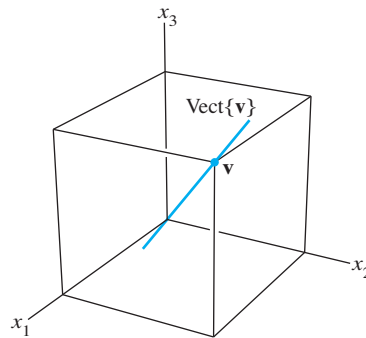


FIGURE 10 $\text{Vect}\{\mathbf{v}\}$ vu comme une droite passant par l'origine

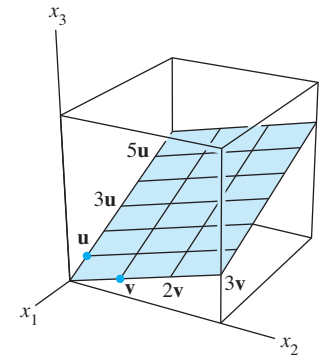


FIGURE 11 $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ vu comme un plan passant par l'origine

EXEMPLE 6 On pose $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'ensemble

$\text{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ est alors un plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine. Le vecteur \mathbf{b} appartient-il à ce plan ?

SOLUTION L'équation $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ a-t-elle une solution ? Pour répondre à cette question, on applique la méthode du pivot à la matrice complète $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La troisième équation est $0 = -2$, ce qui montre que le système n'a pas de solution. L'équation vectorielle $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ n'a donc pas de solution et \mathbf{b} n'appartient pas à $\text{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. ■

Applications de la notion de combinaison linéaire

Le dernier exemple ci-dessous montre comment la colinéarité et les combinaisons linéaires peuvent intervenir quand une quantité, telle que par exemple un coût global, se décompose en plusieurs catégories. L'exemple traite du calcul du coût de production de plusieurs unités d'un produit donné, connaissant le coût unitaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nombre} \\ \text{d'unités} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{coût} \\ \text{unitaire} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{coût} \\ \text{global} \end{array} \right\}$$

EXEMPLE 7 Une entreprise fabrique deux types de produits. Pour un certain produit B, si l'on ramène son prix à 1 €, l'entreprise dépense 0,45 € en matériaux, 0,25 € en main-d'œuvre et 0,15 € en frais généraux. De même, si l'on ramène le prix d'un produit C à 1 €, l'entreprise dépense 0,40 € en matériaux, 0,30 € en main-d'œuvre et 0,15 € en frais généraux. Posons

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

Alors, \mathbf{b} et \mathbf{c} représentent le « coût par euro de revenu » de chacun des deux produits.

- Quelle interprétation économique peut-on donner au vecteur $100\mathbf{b}$?
- Supposons que l'entreprise veuille fabriquer le produit B pour une valeur de x_1 euros et le produit C pour une valeur de x_2 euros. Déterminer un vecteur donnant les divers coûts que l'entreprise devra supporter (pour les matériaux, la main-d'œuvre et les frais généraux).

SOLUTION

- On calcule

$$100\mathbf{b} = 100 \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $100\mathbf{b}$ fournit les divers coûts de production du produit B pour une valeur de 100 €, soit 45 € de matériaux, 25 € de main-d'œuvre et 15 € de frais généraux.

- Le vecteur $x_1\mathbf{b}$ donne les coûts de production de B pour une valeur de x_1 euros et $x_2\mathbf{c}$ donne les coûts de production de C pour une valeur de x_2 euros. Le vecteur $x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$ donne alors les coûts globaux (pour les deux produits). ■

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

- Montrer que, pour tout \mathbf{u} et tout \mathbf{v} dans \mathbb{R}^n , $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
- On pose

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$

Déterminer la ou les valeur(s) de h telle(s) que le vecteur \mathbf{y} appartienne à l'ensemble $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.