
7. Matrices symétriques et formes quadratiques

7.1. Diagonalisation des matrices symétriques.

Définition. Soit A une matrice. On dit que A est **symétrique** si

$$A^T = A$$

Remarque.

Il suit de la définition qu'une matrice symétrique est forcément carrée.

Exemples.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & e & \sqrt{2} \\ e & \pi & e \\ \sqrt{2} & e & \pi \end{bmatrix}$$

Considérons la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

Polynôme caractéristique:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)^2 - 2^2 = (5 - \lambda - 2)(5 - \lambda + 2) = (3 - \lambda)(7 - \lambda)$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 3$ (toutes les deux de multiplicité 1)

$\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Espaces propres:

$$\underline{\lambda_1=7}: A-7I = \begin{bmatrix} 5-7 & 2 \\ 2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

$$E_7 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\underline{\lambda_2=3}: A-3I = \begin{bmatrix} 5-3 & 2 \\ 2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$

$$E_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

On constate que $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Par conséquent, $E_7^\perp = E_3$ et $E_3^\perp = E_7$

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux ($\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$).

Preuve. Par hypothèse: $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ et $A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} \text{On a } \lambda_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) &= (\lambda_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1)^T \vec{u}_2 \\ &= (\vec{u}_1^T A^T) \vec{u}_2 = \vec{u}_1^T (A^T \vec{u}_2) = \vec{u}_1^T (A\vec{u}_2) \\ &= \vec{u}_1^T (\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_2 (\vec{u}_1^T \vec{u}_2) \end{aligned}$$

↑ car A symétrique

$$\lambda_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \lambda_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

$$\text{d'où } (\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nous obtenons $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. ■

Rappel.

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont des vecteurs propres associés.

Nous avons vu que si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est forcément diagonalisable, mais qu'elle peut être non diagonalisable si la multiplicité d'une valeur propre est plus grande que la dimension du sous-espace propre associé.

Rappel.

On dit qu'une matrice carrée U de taille $n \times n$ est orthogonale si U est inversible et $U^{-1} = U^T$

Remarque.

Comme par définition nous avons $U^T U = I_n$, les colonnes de U sont orthonormées et forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

De plus, comme $U U^T = I_n$, les colonnes de U^T (c-à-d. les lignes de U) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Considérons à nouveau l'exemple $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Nous avons:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Comme les vecteurs propres $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux, ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Si on pose:

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

nous avons $A = PDP^{-1}$. Or, comme les colonnes de P sont orthonormales, la matrice P est en fait orthogonale ($P^{-1} = P^T$), d'où $A = PDP^T$.

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est une matrice diagonalisable orthogonalement s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^T$$

Remarque.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors A est diagonalisable car $P^{-1} = P^T$.

Par contre, si A est diagonalisable, alors A n'est pas forcément diagonalisable orthogonalement.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors :

$$A = PDP^T \text{ où } P \text{ est orthogonale et } D \text{ est diagonale.}$$

$$\text{d'où } A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A \Rightarrow A^T = A$$

Par conséquent, A est symétrique.

Il est possible de montrer que la réciproque est aussi vraie :

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Nous avons l'équivalence.

A est diagonalisable orthogonalement $\Leftrightarrow A$ est symétrique.

Conséquence.

Si A est symétrique, alors A est forcément diagonalisable.

Exemple.

Diagonaliser orthogonalement la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9+\lambda & 0 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \rightarrow c_2 + c_1} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dév. } L_1} (9-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (9-\lambda) ((1-\lambda)(8-\lambda) - (-4)(-2)) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8)$$

$$= (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda(\lambda - 9)^2$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ (multiplicité $m_0 = 1$)

$\lambda_1 = 9$ (multiplicité $m_9 = 2$)

Espaces propres:

$$\lambda_1 = 0: A - 0I = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{9}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$

solution générale: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} (= \text{Nul}(A))$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 8 - 2 \\ -8 + 10 - 2 \\ -4 - 4 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 9: A - 9I = \begin{bmatrix} 5-9 & -4 & -2 \\ -4 & 5-9 & -2 \\ -2 & -2 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé: $2x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - \frac{1}{2}z$

solution générale: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $s, t \in \mathbb{R}$

$E_9 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 4 \\ 4 + 5 \\ 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 4 \\ 4 - 4 \\ 2 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Les vecteurs $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas orthogonaux: $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de $E_g = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\} (= \text{Vect}\{\vec{x}_1\})$

On calcule $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \frac{1+0+0}{1+1+0} \vec{v}_1 = \frac{1}{2} \vec{v}_1$

et $\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On pose $\vec{v}_2 = 2(\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $E_g = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

On vérifie: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$

Conséquence: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Comme $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

l'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et nous pouvons écrire $A = P D P^T$ où:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Rappel. Règle « ligne-colonne » du produit matriciel:

Nous avons vu que si A est une matrice de taille $m \times n$ et B est une matrice de taille $n \times p$, alors $C = AB$ est une matrice de taille $m \times p$ telle que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

(produit scalaire de la i -ème ligne de A et la j -ème colonne de B)

Règle « colonne-ligne » du produit matriciel:

Nous avons :

$$AB = \begin{bmatrix} \text{colonne}_1(A) & \text{colonne}_2(A) & \dots & \text{colonne}_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ligne}_1(B) \\ \text{ligne}_2(B) \\ \vdots \\ \text{ligne}_n(B) \end{bmatrix}$$
$$= \text{colonne}_1(A)\text{ligne}_1(B) + \dots + \text{colonne}_n(A)\text{ligne}_n(B)$$

En effet, l'élément ij du produit $\text{colonne}_k(A)\text{ligne}_k(B)$ est $a_{ik}b_{kj}$ et l'élément ij de la matrice AB est donc

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

comme avant.

Théorème spectral

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors:

- A possède n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes), en tenant compte de leur multiplicité.
- La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée en tant que racine de P_A .
- Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux
- A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de A** .

Décomposition spectrale.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si A est diagonalisée orthogonalement à l'aide de la matrice orthogonale $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n]$ et la matrice diagonale

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors nous avons :

$$A = PDP^T = [\vec{u}_1 \ \dots \ \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{u}_1 \ \dots \ \lambda_n \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$$

La règle « colonne-ligne » du produit matriciel nous donne :

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^T) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^T)$$

Définition. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On appelle décomposition spectrale de A l'écriture

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^T) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^T)$$

où $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées.

Remarque.

Nous avons vu que $\vec{u}_j \vec{u}_j^T$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur le sous-espace $\text{Vect}\{\vec{u}_j\} \subset \mathbb{R}^n$. Comme $\dim(\text{Vect}\{\vec{u}_j\}) = 1$, $\text{rang}(\vec{u}_j \vec{u}_j^T) = 1$ et A s'écrit comme la somme de matrices de rang 1.

Exemples.

1. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A &= 7 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T \\ &= 7 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad A &= 7 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = PDP^T$

$$P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A &= 0 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 9 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + 9 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T \\ &= 9 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A &= 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.2. Formes quadratiques.

Considérons une matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ de taille 2×2 et un vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Comme $A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(ax_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + dx_2) \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On dit que la fonction $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ si $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemples.

1. Si $A = I_n$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T I_n \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$

2. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$$

Remarques.

- Si $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + dx_2^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & d \end{bmatrix}$$

- Si $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + dx_2^2 + ex_2x_3 + fx_3^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Changement de variables.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors un changement de variables est une équation de la forme

$$\vec{x} = P\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

où P est une matrice inversible et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ est la nouvelle variable.

Nous avons vu que toute matrice symétrique A de taille $n \times n$ peut être diagonalisée orthogonalement :

$$A = PDP^T$$

où $P = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n]$ est une matrice orthogonale ($P^{-1} = P^T$) et D est une matrice diagonale.

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} = P\vec{y}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{x} &= [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n] \vec{y} \\ &= y_1 \vec{u}_1 + \dots + y_n \vec{u}_n \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\vec{y} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$ (vecteur de coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$)

Considérons maintenant la forme quadratique associée à A :

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Si $\vec{x} = P\vec{y}$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A \vec{x} &= (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T A P) \vec{y} \\ \Rightarrow \boxed{\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}} &\quad (\text{car } A = P D P^T \Leftrightarrow P^T A P = D)\end{aligned}$$

Conséquence.

La forme quadratique $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ exprimée dans la variable $\vec{y}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{y}^T D \vec{y} &= [y_1 \dots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \\ &\quad (\text{il n'y a pas de termes mixtes})\end{aligned}$$

Définition.

On dit que la forme quadratique $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est sous forme diagonale si $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

écrite sous forme diagonale est :

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$

Théorème des axes principaux.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Il existe une matrice orthogonale P telle que le changement de variables $\vec{x} = P\vec{y}$ met la forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sous forme diagonale $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$

Les colonnes de P sont appelées les **axes principaux** de Q .

Preuve.

Comme par hypothèse A est symétrique, A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = P D P^T$, où P est orthogonale et D est diagonale. ■

Exemples.

1. Comme $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les axes principaux de

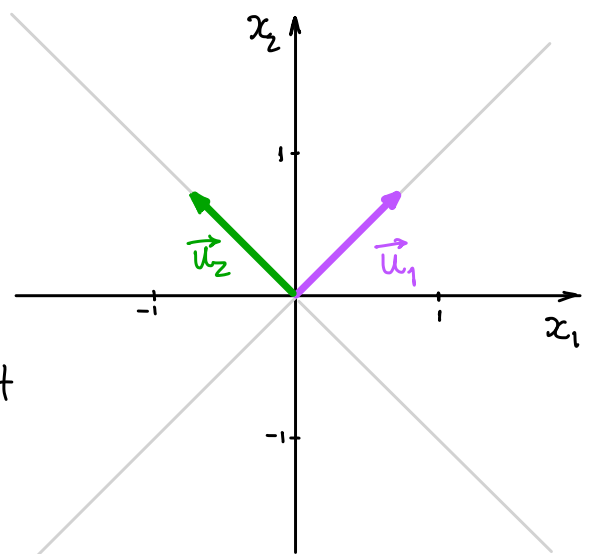
$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

sont donc

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q est

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$



2. Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les axes principaux de la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$$

sont

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q ,

$$Q(\vec{y}) = 9y_2^2 + 9y_3^2$$

Définition.

Soit $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

- on dit que Q est **définie positive** si $Q(\vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est **définie négative** si $Q(\vec{x}) < 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est **indéfinie** si $Q(\vec{x})$ prend des valeurs positives et négatives pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.

- Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$ et soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sa forme quadratique associée. Alors
- Q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont positives
 - Q est définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont négatives
 - Q est indéfinie $\Leftrightarrow A$ a des valeurs propres positives et négatives.

Preuve. Le théorème des axes principaux nous permet d'écrire

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

d'où le résultat. ■

Exemples.

1. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$ est définie positive car $Q(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.
2. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ est définie positive car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 3$.
3. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ est indéfinie car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = -3$.

$$[\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 5^2 = (-3-\lambda)(7-\lambda)]$$