Définition. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.
On appelle **décomposition spectrale de A** l'écriture

$$\boxed{A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^{\,T}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^{\,T}) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^{\,T})}$$

où $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées.

Remarque.
Nous avons vu que $\vec{u}_j \vec{u}_j^{\,T}$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathrm{Vect}\{\vec{u}_j\} \subset \mathbb{R}^n$. Comme $\dim(\mathrm{Vect}\{\vec{u}_j\}) = 1$, $\mathrm{rang}(\vec{u}_j \vec{u}_j^{\,T}) = 1$ et A s'écrit comme la somme de matrices de rang 1.

Exemples.

1. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \;\; \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A = 7\,\vec{u}_1\vec{u}_1^{\,T} + 3\,\vec{u}_2\vec{u}_2^{\,T}$$

$$= 7\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 7\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

2. Donner une décomposition spectrale de $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A=PDP^T$

$$P=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]=\begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A = 0\,\vec{u}_1\vec{u}_1^{\,T} + 9\,\vec{u}_2\vec{u}_2^{\,T} + 9\,\vec{u}_3\vec{u}_3^{\,T}$$

$$= 9\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 9\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1/18 & 1/18 & -2/9 \\ 1/18 & 1/18 & -2/9 \\ -2/9 & -2/9 & 8/9 \end{bmatrix}}$$

7.2. Formes quadratiques.

Considérons une matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ de taille 2×2 et un vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Comme $A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(ax_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + dx_2) \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On dit que la fonction $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ si $\boxed{Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemples.

1. Si $A = I_n$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T I_n \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$

2. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2$$

Remarques.

- Si $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + b\,x_1x_2 + dx_2^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & d \end{bmatrix}$$

- Si $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + b\,x_1x_2 + c\,x_1x_3 + dx_2^2 + e\,x_2x_3 + f\,x_3^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Changement de variables.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors un changement de variables est une équation de la forme

$$\vec{x} = P\vec{y} \iff \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

où P est une matrice inversible et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ est la nouvelle variable.

Nous avons vu que toute matrice symétrique A de taille $n \times n$ peut être diagonalisée orthogonalement :

$$A = PDP^T$$

où $P = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]$ est une matrice orthogonale $(P^{-1} = P^T)$ et D est une matrice diagonale.

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} = P\vec{y}$. On a

$$\vec{x} = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]\vec{y}$$

$$= y_1\vec{u}_1 + \dots + y_n\vec{u}_n$$

d'où $\boxed{\vec{y} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$ (vecteur de coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$)

Considérons maintenant la forme quadratique associée à A :

$$\vec{Q}(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Si $\vec{x} = P\vec{y}$, alors nous avons

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T A P) \vec{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}} \qquad (\text{car } A = PDP^T \Leftrightarrow P^T A P = D)$$

Conséquence :

La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ exprimée dans la variable $\vec{y}$ s'écrit

$$\vec{y}^T D \vec{y} = [y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

(il n'y a pas de termes mixtes)

Définition.

On dit que la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est sous **forme diagonale** si $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \;\; \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

écrite sous forme diagonale est:

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$

Théorème des axes principaux.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Il existe une matrice orthogonale P telle que le changement de variables $\vec{x} = P\vec{y}$ met la forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sous forme diagonale $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$

Les colonnes de P sont appelées les axes principaux de Q.

Preuve.

Comme par hypothèse A est symétrique, A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$, où P est orthogonale et D est diagonale. $\blacksquare$

Exemples.

1. Comme $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les axes principaux de

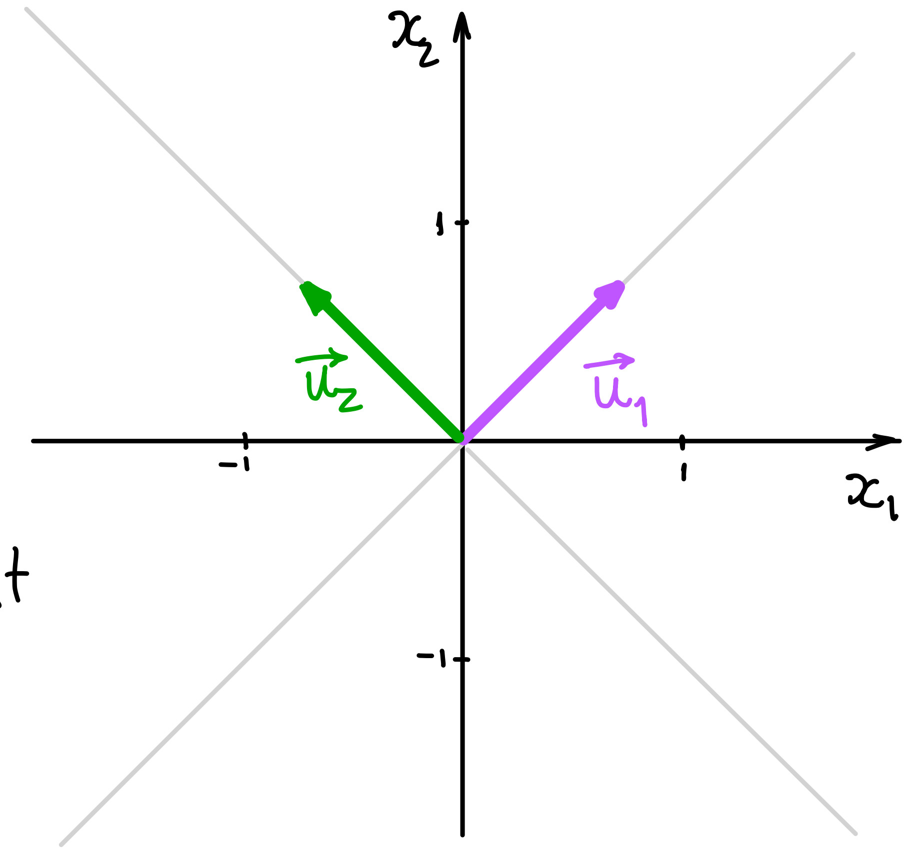
$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

sont donc

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q est

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$



2. Nous avons vu que $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ s'écrit $A=PDP^T$ où

$$P=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]=\begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les axes principaux de la forme quadratique

$$Q(\vec{x})=5x_1^2-8x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-4x_2x_3+8x_3^2$$

sont

$$\vec{u}_1=\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3=\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q,

$$Q(\vec{y})=9y_2^2+9y_3^2$$

Définition.

Soit $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

- on dit que Q est définie positive si $Q(\vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est définie négative si $Q(\vec{x}) < 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est indéfinie si $Q(\vec{x})$ prend des valeurs positives et négatives pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$ et soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sa forme quadratique associée. Alors

- Q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont positives
- Q est définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont négatives
- Q est indéfinie $\Leftrightarrow$ A a des valeurs propres positives et négatives.

Preuve. Le théorème des axes principaux nous permet d'écrire

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

d'où le résultat. ■

Exemples.

1. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$ est définie positive car $Q(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.

2. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ est définie positive car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 3$.

3. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ est indéfinie car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = -3$.

$$\left[\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 5^2 = (-3-\lambda)(7-\lambda) \right]$$