7. Matrices symétriques (et formes quadratiques)

7.1. Diagonalisation des matrices symétriques.

Définition. Soit A une matrice. On dit que A est symétrique si

$$\boxed{A^T = A}$$

Remarque.

Il suit de la définition qu'une matrice symétrique est forcément carrée.

Exemples.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \pi & e & \sqrt{2} \\ e & \pi & e \\ \sqrt{2} & e & \pi \end{bmatrix}$$

Considérons le matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

Polynôme caractéristique :

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 2^2 = (5-\lambda-2)(5-\lambda+2) = (3-\lambda)(7-\lambda)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 3$ (toutes les deux de multiplicité 1)

$\Rightarrow$ A est diagonalisable.

Espaces propres:

$\underline{\lambda_1 = 7}$: $A - 7I = \begin{bmatrix} 5-7 & 2 \\ 2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé: $x - y = 0 \iff x = y$

$E_7 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$: $A - 3I = \begin{bmatrix} 5-3 & 2 \\ 2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé: $x + y = 0 \iff x = -y$

$E_3 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

On constate que $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Par conséquent, $E_7^{\perp} = E_3$ et $E_3^{\perp} = E_7$

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0)$.

Preuve. Par hypothèse : $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ et $A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

On a
$$\lambda_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = (\lambda_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1)^T \vec{u}_2$$
$$= (\vec{u}_1^T A^T)\vec{u}_2 = \vec{u}_1^T (A^T \vec{u}_2) = \vec{u}_1^T (A\vec{u}_2)$$

car A symétrique

$$= \vec{u}_1^T (\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_2 (\vec{u}_1^T \vec{u}_2)$$

$$\lambda_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \lambda_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

d'où $(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nous obtenons $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. ■

Rappel.

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont des vecteurs propres associés.

Nous avons vu que si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est forcément diagonalisable, mais qu'elle peut être non diagonalisable si la multiplicité d'une valeur propre est plus grande que la dimension du sous-espace propre associé.

Rappel.

On dit qu'une matrice carreé U de taille $n \times n$ est orthogonale si U est inversible et $\boxed{U^{-1} = U^T}$

Remarque.

Comme par définition nous avons $U^T U = I_n$, les colonnes de U sont orthonormées et forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
De plus, comme $UU^T = I_n$, les colonnes de U^T (c-à-d. les lignes de U) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Considérons à nouveau l'exemple $A=\begin{bmatrix}5&2\\2&5\end{bmatrix}$. Nous avons :

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

Comme les vecteurs propres $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ sont orthogonaux, ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Si on pose :

$$P=[\vec{u}_1\ \ \vec{u}_2]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}$$

nous avons $A=PDP^{-1}$. Or, comme les colonnes de P sont orthonormales, la matrice P est en fait orthogonale ($P^{-1}=P^T$), d'où

$$A=PDP^T.$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est une matrice diagonalisable orthogonalement s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$\boxed{A = PDP^T}$$

Remarque.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors A est diagonalisable car $P^{-1} = P^T$.

Par contre, si A est diagonalisable, alors A n'est pas forcément diagonalisable orthogonalement.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors :

$A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale.

d'où $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A \Rightarrow A^T = A$

Par conséquent, A est symétrique.

Il est possible de montrer que la réciproque est aussi vraie :

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Nous avons l'équivalence.

A est diagonalisable orthogonalement $\Leftrightarrow$ A est symétrique.

Conséquence.

Si A est symétrique, alors A est forcément diagonalisable.

Exemple.

Diagonaliser orthogonalement la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{=} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9+\lambda & 0 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2 \to C_2 + C_1}{=} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} (9-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (9-\lambda)\big((1-\lambda)(8-\lambda) - (-4)(-2)\big) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8)$$

$$= (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda(\lambda - 9)^2$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = 0$ (multiplicité $m_0 = 1$)

$\lambda_1 = 9$ (multiplicité $m_9 = 2$)

Espaces propres :

$\lambda_1 = 0$:

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{2}L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to \frac{1}{9}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé : $\begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$

solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$E_0 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $(= \text{Nul}(A))$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-8-2 \\ -8+10-2 \\ -4-4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 9$:

$$A - 9I = \begin{bmatrix} 5-9 & -4 & -2 \\ -4 & 5-9 & -2 \\ -2 & -2 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé : $2x + 2y + z = 0 \iff x = -y - \frac{1}{2}z$

solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $s, t \in \mathbb{R}$

$$E_9 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4+5 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4-4 \\ 2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{x}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas orthogonaux : $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de $E_3 = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\}$ $(= \text{Vect}\{\vec{x}_1\})$

On calcule $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \dfrac{1+0+0}{1+1+0} \vec{v}_1 = \dfrac{1}{2} \vec{v}_1$

et $\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On pose $\vec{v}_2 = 2(\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $E_3 = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

On vérifie : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$

Conséquence : $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Comme $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

l'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et nous pouvons écrire $A = PDP^T$ où :

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Rappel. Règle « ligne-colonne » du produit matriciel :

Nous avons vu que si A est une matrice de taille $m\times n$ et B est une matrice de taille $n\times p$, alors $C=AB$ est une matrice de taille $m\times p$ telle que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

(produit scalaire de la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B)

Règle « colonne-ligne » du produit matriciel:

Nous avons :

$$AB = \begin{bmatrix} \text{colonne}_1(A) & \text{colonne}_2(A) & \cdots & \text{colonne}_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ligne}_1(B) \\ \text{ligne}_2(B) \\ \vdots \\ \text{ligne}_n(B) \end{bmatrix}$$

$$= \text{colonne}_1(A)\,\text{ligne}_1(B) + \ldots + \text{colonne}_n(A)\,\text{ligne}_n(B)$$

En effet, l'élément ij du produit $\text{colonne}_k(A)\,\text{ligne}_k(B)$ est $a_{ik}b_{kj}$ et l'élément ij de la matrice AB est donc

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

comme avant.

Théorème spectral

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors :

- A possède n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes), en tenant compte de leur multiplicité.
- La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée en tant que racine de P_c.
- Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux
- A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A.

Décomposition spectrale.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si A est diagonalisée orthogonalement à l'aide de la matrice orthogonale $P = [\vec{u}_1 \; \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n]$ et la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$, alors nous avons :

$$A = PDP^T = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{u}_n^{\,T} \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{u}_1 \cdots \lambda \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{u}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

La règle « colonne-ligne » du produit matriciel nous donne :

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^{\,T}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^{\,T}) + \ldots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^{\,T})$$