Preuve.

Par construction, le vecteur $\hat{y}$ appartient à W car il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$.

A voir : $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} \in W^{\perp}$

Il faut donc montrer $\vec{z} \cdot \vec{u}_j = 0$, pour $j \in \{1, \ldots, k\}$

On a

$$\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = (\vec{y} - \hat{y}) \cdot \vec{u}_1 = \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \hat{y} \cdot \vec{u}_1$$

$$= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \left(\frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \ldots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k \right) \cdot \vec{u}_1$$

$$= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \underbrace{(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1)}_{=0} - \underbrace{\ldots}_{=0} - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \underbrace{(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1)}_{=0}$$

$$= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \vec{y} \cdot \vec{u}_1 = 0$$

Un calcul analogue nous donne

$$\vec{z} \cdot \vec{u_j} = 0 \quad , \text{ pour } \quad j \in \{2, \dots, k\}$$

Il nous reste à montrer que l'écriture est unique.

Supposons qu'on a une autre décomposition :

$$\vec{y} = \hat{y}_1 + \vec{z}_1 \quad \text{avec } \hat{y}_1 \in W \text{ et } \vec{z}_1 \in W^\perp$$

On a donc $\quad \hat{y} + \vec{z} = \hat{y}_1 + \vec{z}_1$

d'où $\quad \underbrace{\hat{y} - \hat{y}_1}_{\in W} = \underbrace{\vec{z}_1 - \vec{z}}_{\in W^\perp}$

Ainsi, le vecteur $\vec{u} = \hat{y} - \hat{y}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z} \in W \cap W^\perp$

d'où l'unicité :

$$\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{y} - \hat{y}_1 = \vec{0} \\ \vec{z}_1 - \vec{z} = \vec{0} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{y} = \hat{y}_1 \\ \vec{z} = \vec{z}_1 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Corollaire. Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\boxed{(W^\perp)^\perp = W}$$

Preuve. Nous avons déjà montré $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Il reste à montrer $(W^\perp)^\perp \subset W$.

Soit donc $\vec{y} \in (W^\perp)^\perp \subset \mathbb{R}^n$.

Le théorème de la projection orthogonale nous donne :

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}, \text{ avec } \hat{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp$$

Comme $\vec{z} \in W^\perp$ et $\vec{y} \in (W^\perp)^\perp$, nous avons $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$

d'où $0 = \vec{y} \cdot \vec{z} = (\hat{y} + \vec{z}) \cdot \vec{z} = \hat{y} \cdot \vec{z} + \vec{z} \cdot \vec{z} = 0 + \vec{z} \cdot \vec{z}$

Ainsi $\vec{z} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{z} = \vec{0}$, ce qui implique $\vec{y} = \hat{y} \in W$ $\blacksquare$

Remarques.

- L'unicité de la décomposition $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ montre que la projection $\text{proj}_W \vec{y}$ ne dépend que du sous-espace vectoriel W et non pas de la base (orthogonale) de W choisie.
- Si $\vec{y} \in W$, alors $\text{proj}_W \vec{y} = \vec{y}$.

  Ceci nous donne un critère pratique pour caractériser l'appartenance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

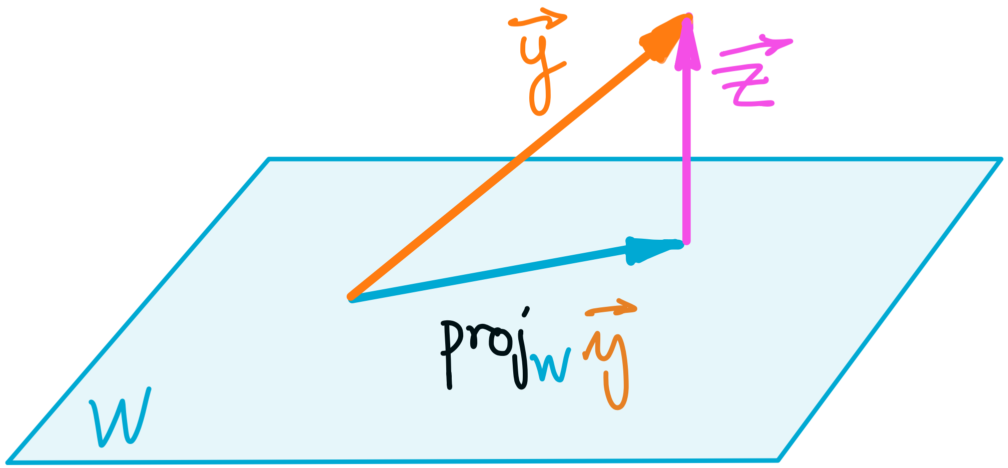
Définition.

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k>0$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}$ un vecteur quelconque.

On définit la distance entre $\vec{y}$ et W, notée $\mathrm{dist}(\vec{y}, W)$, par :

$$\boxed{\mathrm{dist}(\vec{y}, W) = \| \vec{y} - \mathrm{proj}_W \vec{y} \| = \| \vec{z} \|}$$



Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k>0$.

On peut montrer que l'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_W \vec{v}$$

est linéaire. Elle est appelée la projection orthogonale sur W.

Comme $T(\vec{v}) = \vec{0} \iff \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \ldots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k = \vec{0}$

$\iff \vec{v} \cdot \vec{u}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$

$\iff \vec{v} \in W^\perp$

nous avons $\text{Ker}(T) = W^\perp$

D'autre part, $\text{Im}(T) = W$.

Comme $\dim(W) = k$, le théorème du rang nous donne $\dim(W^\perp) = n-k$

Par construction,

- Si $\vec{v} \in W$, alors $\text{proj}_W \vec{v} = \vec{v}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 1$.
- Si $\vec{v} \in W^\perp$, alors $\text{proj}_W \vec{v} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 0$.

Soit $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ une base de W (pas forcément orthogonale)

et soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\}$ une base de $W^\perp$ (pas forcément orthogonale)

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

et la matrice de $T = \text{proj}_W$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} k \text{ fois} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \ddots\\ 0\end{matrix}}\right\} n-k \text{ fois} \end{array}$$

Théorème. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthonormale de W, alors

$$\boxed{\mathrm{proj}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k}$$

De plus, si U est la matrice de taille $n \times k$ suivante :

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_k]$$

alors nous avons

$$\boxed{\mathrm{proj}_W \vec{y} = (UU^T)\vec{y}} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Autrement dit, la matrice $A = UU^T$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur W

$$T = \mathrm{proj}_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Preuve. Le théorème de la projection orthogonale nous dit que tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}, \text{ où } \hat{y} = \text{proj}_W \vec{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp.$$

De plus, comme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthonormale de W, nous trouvons :

$$\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k$$

Comme $U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_k]$ et $W = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ nous avons :

$$W = \text{Col}(U).$$

Par conséquent,

$$W^\perp = (\text{Col}(U))^\perp = \text{Nul}(U^T)$$

Comme $\hat{y} \in W = \mathrm{Col}(U)$, on a

$$\hat{y} = U\vec{x} \quad \text{pour un certain } \vec{x} \in \mathbb{R}^k$$

Comme $\vec{z} \in W^\perp = \mathrm{Nul}(U^T)$, on a $U^T\vec{z} = \vec{0}$.

Ainsi $U^T\vec{y} = U^T(\hat{y} + \vec{z}) = U^T\hat{y} + U^T\vec{z} = U^T(U\vec{x}) + \vec{0}$

$$= (U^TU)\vec{x}$$

Comme les k colonnes de U forment un ensemble orthonormal,

on a $U^TU = I_k$ ce qui nous donne

$$\vec{x} = U^T\vec{y}$$

d'où

$$\mathrm{proj}_W \vec{y} = \hat{y} = U\vec{x} = U(U^T\vec{y}) = (UU^T)\vec{y} \qquad \blacksquare$$

Théorème.

Soit U une matrice de taille $m \times n$:

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \cdots \ \vec{u}_n], \text{ avec } \vec{u}_j \in \mathbb{R}^m \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\}$$

Les n colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$.

Attention.

La matrice UU^T est une matrice de taille $m \times m$ et est associée à la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} \subset \mathbb{R}^m$.

Théorème.

Soit U une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées.

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors :

1. $\| U\vec{x} \| = \| \vec{x} \|$
2. $(U\vec{x}) \cdot (U\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$
3. $(U\vec{x}) \cdot (U\vec{y}) = 0$ si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Preuve. Voir Exercice 11, série 13. $\blacksquare$

Conséquence.

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $T(\vec{x}) = U\vec{x}$ conserve les longueurs et l'orthogonalité.

Matrices orthogonales

Définition.

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est une matrice orthogonale si A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = A^T}$$

Remarque.

Comme $A^T A = I_n$, les colonnes de A sont orthonormées et forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. De plus, comme $AA^T = I_n$, les colonnes de A^T (c-à-d. les lignes de A) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.