

## 6.2. Ensembles orthogonaux.

Définition. Un ensemble  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est appelé **ensemble orthogonal** si les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  sont orthogonaux deux à deux :

$$\vec{u}_j \cdot \vec{u}_l = 0 \quad \text{pour tout } j, l \in \{1, \dots, k\} \text{ tels que } j \neq l$$

### Exemples.

1. L'ensemble  $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$  est orthogonal car  $2 \cdot 3 + 3(-2) = 0$ .
2. L'ensemble  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  est orthogonal car  
 $1 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$  et  $1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
3. Si  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  alors tout sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  est orthogonal.

Théorème. Si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls, alors  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble linéairement indépendant.

Conséquence. Si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls, alors  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base de  $\text{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ .

## Preuve.

$$\text{Soit } \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

$$\text{A voir: } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

$$\text{On a } \vec{u}_1 \cdot (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) = \vec{u}_1 \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{d'où } \alpha_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + \alpha_2 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \dots + \alpha_k (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_k) = 0$$

Comme  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthogonal, on a  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$

pour tout  $j \in \{2, \dots, k\}$ , ce qui implique:

$$\alpha_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) = 0$$

Comme  $\vec{u}_1$  est non nul, on a  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 > 0$  et  $\alpha_1 = 0$ .

Un calcul analogue nous donne  $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$  ■

Définition. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $0 < k \leq n$ .

On dit que l'ensemble  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base orthogonale de  $W$

si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base de  $W$  qui est un ensemble orthogonal.

Exemple.

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

Le théorème suivant nous dit que lorsqu'on dispose d'une base orthogonale de  $W$ , le calcul des coordonnées d'un vecteur  $\vec{w} \in W$  dans cette base est très simple :

Théorème. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $0 < k \leq n$ .

Soit  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  une base orthogonale de  $W$ . Alors tout élément  $\vec{w} \in W$  s'écrit de manière unique :

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k$$

## Preuve.

Soit  $\vec{w} \in W$ . Comme  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base de  $W$  on a

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k \quad (\text{écriture unique})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \vec{w} \cdot \vec{u}_1 &= (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \underbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1}_{=0} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{w} \cdot \vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$$

$$\text{ce qui nous donne: } \alpha_1 = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

On trouve  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$  de manière analogue en calculant

$$\vec{w} \cdot \vec{u}_j, \text{ avec } j \in \{2, \dots, k\}$$



### Exemple.

Les vecteurs  $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  sont orthogonaux et non nuls.

Ainsi,  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ . Nous avons:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 \\ &= \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{1^2 + 1^2} \vec{u}_1 + \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} \vec{u}_2 \\ &= \frac{14}{2} \vec{u}_1 + \frac{-4}{2} \vec{u}_2 = 7\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calcul alternatif:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Définition. Un ensemble  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est appelé **ensemble orthonormal** si :

- $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthogonal
- les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  sont unitaires :  
$$\|\vec{u}_j\| = 1, \text{ pour } j \in \{1, \dots, k\}$$

### Exemples.

1. L'ensemble  $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$  n'est pas orthonormal.

2. L'ensemble  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  n'est pas orthonormal.

3. Si  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  alors tout sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  est orthonormal.

## Remarque.

Par construction, si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthonormal, alors les vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  sont non nuls et de ce fait,  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est toujours linéairement indépendant.

Par conséquent, si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est un ensemble orthonormal, alors  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base de  $\text{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ .

Définition. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $0 < k \leq n$ .

On dit que l'ensemble  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une **base orthonormale**

(ou **base orthonormée**) de  $W$  si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base de  $W$

qui est un ensemble orthonormal.

Exemple

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .

Remarque.

Si  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$  est une base orthogonale de  $W$ , alors l'ensemble

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ , où  $\vec{u}_j = \frac{\vec{w}_j}{\|\vec{w}_j\|}$  pour  $j=1, \dots, k$ , est une base

orthonormale de  $W$ .

Théorème. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $0 < k \leq n$ .

Soit  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  une base orthonormale de  $W$ . Alors tout élément

$\vec{w} \in W$  s'écrit de manière unique:

$$\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

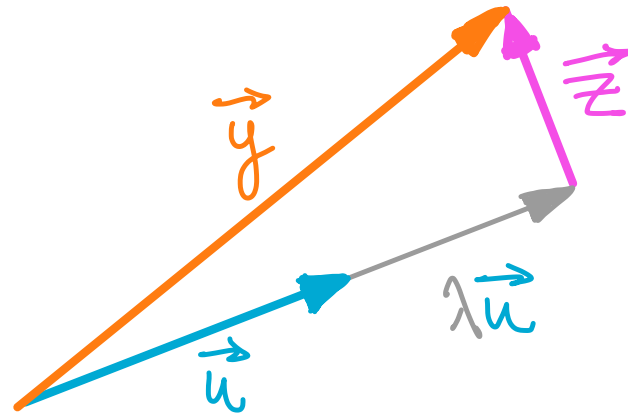
### 6.3. Projection orthogonale

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur non nul fixé.

On aimerait écrire un vecteur arbitraire  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  comme la somme d'un multiple de  $\vec{u}$  et d'un vecteur orthogonal à  $\vec{u}$ :

$$\vec{y} = \lambda \vec{u} + \vec{z} \text{ avec } \vec{z} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Géométriquement:



Comme  $\vec{z} = \vec{y} - \lambda \vec{u}$

nous avons  $\vec{u} \cdot \vec{z} = \vec{u} \cdot (\vec{y} - \lambda \vec{u})$

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{y} - \lambda (\vec{u} \cdot \vec{u})$$

d'où  $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Ainsi, le vecteur  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  peut s'écrire:

$$\vec{y} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} + \vec{z}$$

Définition. Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur non nul.

La projection orthogonale de  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  sur  $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ , notée  $\text{proj}_W \vec{y}$  ou  $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}$ , est le vecteur

$$\text{proj}_W \vec{y} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{y} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

Comme par construction le vecteur  $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}$  est orthogonal à  $W$ , nous avons  $\vec{z} \in W^\perp$  et nous pouvons exprimer le vecteur  $\vec{y}$  comme une somme d'un vecteur dans  $W$  et d'un vecteur dans  $W^\perp$ :

$$\vec{y} = \underbrace{\text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}}_{\in W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in W^\perp}$$

### Remarque.

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur non nul et  $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ .

On peut montrer que l'application  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

est linéaire (voir exercice 15, série 12). Elle est appelée

la projection orthogonale sur  $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ .

Comme  $T(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \in W^\perp$

nous avons  $\text{Ker}(T) = W^\perp$

Comme  $T(\vec{v})$  est un multiple de  $\vec{u}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

nous avons  $\text{Im}(T) = W$

L'associativité du produit matriciel nous permet d'écrire :

$$\underbrace{(\vec{u}\vec{u}^T)}_{\text{matrice de taille } n \times n} \vec{v} = \vec{u} \underbrace{(\vec{u}^T \vec{v})}_{\text{nombre réel}} = \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}, \text{ car } \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (\vec{u}\vec{u}^T) \vec{v}$$

Par conséquent, la matrice canoniquement associée

à l'application linéaire  $T = \text{proj}_{\vec{u}}$  est :

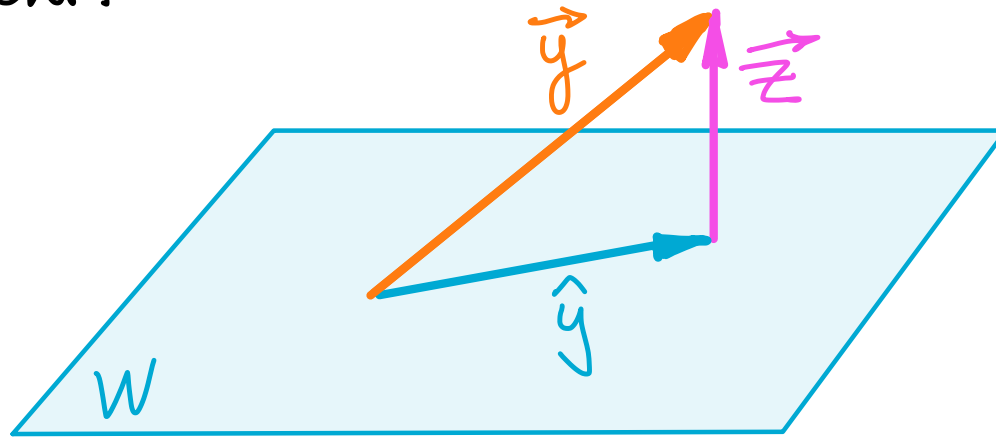
$$A_T = \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}\vec{u}^T = \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}}$$

Soit maintenant  $W \subset \mathbb{R}^n$  un sous espace vectoriel de dimension  $k \geq 2$ ,

On aimerait écrire un vecteur arbitraire  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  comme la somme d'un vecteur  $\hat{y} \in W$  et d'un vecteur  $\vec{z} \in W^\perp$  :

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

Géométriquement:



## Théorème de la projection orthogonale.

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k > 0$ .

Tout vecteur  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z} \quad \text{où } \hat{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp.$$

De plus, si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  est une base orthogonale de  $W$ , alors nous avons une formule explicite pour calculer  $\hat{y}$  :

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k \quad (*)$$

Le vecteur  $\hat{y}$  est appelé la projection orthogonale de  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  sur  $W$  et on le note  $\text{proj}_W \vec{y}$ .