5. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous allons considérer seulement des applications linéaires de la forme $T: V \longrightarrow V$.

Dans beaucoup de situations pratiques, il est utile de déterminer les vecteurs $\vec{v} \in V$ pour lesquels $T(\vec{v})$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad , \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit qu'un vecteur non-nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si le vecteur $A\vec{v}$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}$$

Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé valeur propre de A et on dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple.

Le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -3$. En effet,

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 \\ -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

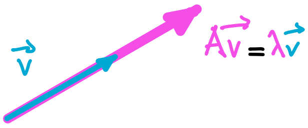
$$\Rightarrow \quad A\vec{v} = -3\vec{v}$$

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

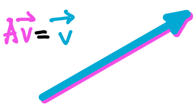
Soit A une matrice carrée (2×2 ou 3×3) et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.

Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ un vecteur propre de A associé à λ.

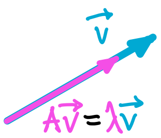
- Si $\lambda > 1$ alors A dilate $\vec{v}$:



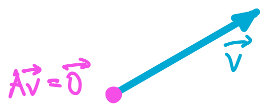
- Si $\lambda = 1$ alors A fixe $\vec{v}$:



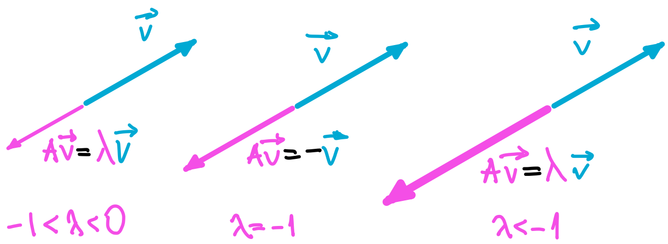
- Si $0 < \lambda < 1$ alors A contracte $\vec{v}$:



- Si $\lambda = 0$ alors A annule $\vec{v}$:



- Si $\lambda < 0$ alors A inverse la direction de $\vec{v}$:



Calcul des valeurs propres.

On a $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{= I_n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}}$$

Conséquence.

$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \neq \vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array}\right\}$ $\iff \vec{v} \neq \vec{0}$ solution de $(A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

$\iff \vec{v} \neq \vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)$

$\iff (A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

possède une infinité de solutions

$\iff \dim(\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)) > 0$

$\iff n - \mathrm{rang}(A-\lambda I_n) > 0$

$\iff \mathrm{rang}(A-\lambda I_n) < n$

$\iff \det(A-\lambda I_n) = 0$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le polynôme caractéristique de A, noté $P_c(\lambda)$, est défini par

$$\boxed{P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n dans la variable λ.

Théorème. Nous avons l'équivalence

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff P_c(\lambda) = 0$$
$$\iff \lambda \text{ est une racine de } P_c$$

Exemples.

1. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) - 6(-1)$$
$$= -12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1 = -3}$ et $\boxed{\lambda_2 = 2}$

2. Trouver les valeurs propres de $B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$P_c(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}5-\lambda & -1\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(5-\lambda)(1-\lambda)-3(-1)$

$= 5-5\lambda-\lambda+\lambda^2+3=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1=2}$ et $\boxed{\lambda_2=4}$

3. Trouver les valeurs propres de $C=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$P_c(\lambda)=\det(C-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-2-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(-2-\lambda)(2-\lambda)-5(-1)$

$=\lambda^2-4+5=\lambda^2+1$

$\Rightarrow$ C n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Par contre, comme $\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$, alors

$\boxed{\lambda_1=i}$ et $\boxed{\lambda_2=-i}$ sont les valeurs propres de C dans $\mathbb{C}$.

4. Trouver les valeurs propres de $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$p_c(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{C_3\to C_3+C_2}{=} \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & 5-\lambda \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2\to L_2-L_3}{=} \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_3}{=} (5-\lambda)\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\left[(4-\lambda)(-1-\lambda)-2(-3)\right]=(5-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4+6)$$

$$=(5-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=(5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1=1}$, $\boxed{\lambda_2=2}$, $\boxed{\lambda_3=5}$

Remarques.

- Si $\det(A)=0$, alors $\lambda=0$ est une racine de $p_c(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$.

  Ainsi, nous avons l'équivalence :

  A n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ $\lambda=0$ est une valeur propre de A

- Si A est triangulaire, alors $A-\lambda I_n$ est aussi triangulaire :

$$A-\lambda I_n=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

  d'où : $p_c(\lambda)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$

  Dans ce cas, les valeurs propres de A se trouvent sur la diagonale.

Calcul des vecteurs propres.

Rappel.

$\left.\begin{array}{l}\vec{v}\neq\vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \iff \vec{v}\neq\vec{0}$ solution de $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

$\iff \vec{v}\neq\vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de A. L'*espace propre de A associé à λ* noté E_λ, est défini par

$$\boxed{E_\lambda=\mathrm{Nul}(A-\lambda I)}$$

Ainsi, par définition, l'espace propre de A associé à λ contient tous les vecteurs propres de A associés à λ ainsi que le vecteur zéro.

Remarques.

- Par construction, $\dim(E_\lambda)>0$ (car $\mathrm{rang}(A-\lambda I_n)<n$).
  Par conséquent, si lors d'un calcul on trouve $\dim(E_\lambda)=0$, cela veut dire que λ n'est pas une valeur propre de A !
- Soit m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $p_c(\lambda)$.
  [p.ex. si $p_c(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-5)(\lambda+4)^3$ alors $m_3=2$, $m_5=1$ et $m_{-4}=3$]
  On peut montrer que $\dim(E_\lambda)\leqslant m_\lambda$, d'où

$$\boxed{1\leqslant\dim(E_\lambda)\leqslant m_\lambda}$$

  En particulier, si λ est une racine simple de $p_c(\lambda)$ nous avons $m_\lambda=1$ et $\dim(E_\lambda)=1$.

- Le nombre $\dim(E_\lambda)$ est parfois appelé multiplicité géométrique de la valeur propre λ de A.
- Le nombre m_λ est parfois appelé multiplicité algébrique de la valeur propre λ de A.

Exemples.

1. Trouver les espaces propres de $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 6\\ -1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\ldots=(\lambda+3)(\lambda-2)$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1=-3}$ et $\boxed{\lambda_2=2}$

Comme $m_{-3}=1$ et $m_2=1$, on s'attend à trouver $\dim(E_{-3})=1$ et $\dim(E_2)=1$

$\lambda_1=-3$: $A-(-3)I=\begin{bmatrix}3-(-3) & 6\\ -1 & -4-(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ x & y\end{array}$

$\text{rang}(A+3I)=1 \Rightarrow \dim(E_{-3})=2-1=1$

système associé : $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-3}=\text{Vect}\{(-1,1)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+6 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 3-2 & 6 \\ -1 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix} \end{array}$

$\operatorname{rang}(A-2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$

système associé : $x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -6y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_2 = \operatorname{Vect}\{(-6,1)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18+6 \\ 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Trouver les espaces propres de $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ldots = (\lambda-2)(\lambda-4)$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 2}$ et $\boxed{\lambda_2 = 4}$

Comme $m_2 = 1$ et $m_4 = 1$, on s'attend à trouver

$$\dim(E_2) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(E_4) = 1$$

$\underline{\lambda_1 = 2}$: $B - 2I = \begin{bmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix} \end{array}$

$\operatorname{rang}(B-2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$

système associé : $3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_2 = \operatorname{Vect}\{(1,3)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 4$: $B - 4I = \begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$

$\text{rang}(B-4I) = 1 \Rightarrow \dim(E_4) = 2 - 1 = 1$

système associé: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_4 = \text{Vect}\{(1,1)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ldots = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$, $\boxed{\lambda_3 = 5}$

Comme $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ et $m_5 = 1$ on s'attend à trouver

$\dim(E_1) = 1$, $\dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_5) = 1$

$\lambda_1 = 1$:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 4-1 & 2 & -2 \\ -5 & 3-1 & 2 \\ -2 & 4 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{8}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$\operatorname{rang}(A - I) = 2 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 2 = 1$

système associé:

$$\begin{cases} x \quad -\frac{1}{2}z = 0 \\ \quad y - \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4}z \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \boxed{E_1 = \operatorname{Vect}\{(2,1,4)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2-8 \\ -10+3+8 \\ -4+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Remarque. Il est possible ici de faire des opérations élémentaires sur les lignes de sorte à éviter les fractions:

$$A - 1I \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

système associé:

$$\begin{cases} x - 2y \quad = 0 \\ \quad -4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 4y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et l'on retrouve la même solution générale.

$\lambda_2 = 2$:

$$A-2I=\begin{bmatrix}4-2 & 2 & -2\\ -5 & 3-2 & 2\\ -2 & 4 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ -5 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix}\underset{L_1\to\frac{1}{2}L_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -5 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -1\end{bmatrix}\underset{\substack{L_2\to L_2+5L_1\\ L_3\to L_3+2L_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 6 & -3\\ 0 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3\to L_3-L_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\underset{L_2\to\frac{1}{6}L_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\underset{L_1\to L_1-L_2}{\sim}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z\end{matrix}\end{array}$$

$\text{rang}(A-2I)=2 \Rightarrow \dim(E_2)=3-2=1$

système associé:

$$\begin{cases}x - \frac{1}{2}z = 0\\ y-\frac{1}{2}z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}z\\ y=\frac{1}{2}z\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}, \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2=\text{Vect}\{(1,1,2)\}}$$

Vérification:

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2-4\\ -5+3+4\\ -2+4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 5$:

$$A-5I=\begin{bmatrix}4-5 & 2 & -2\\ -5 & 3-5 & 2\\ -2 & 4 & 1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ -5 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\end{bmatrix}\underset{L_1\to -L_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -5 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\end{bmatrix}\underset{\substack{L_2\to L_2+5L_1\\ L_3\to L_3+2L_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -12 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2\to -\frac{1}{12}L_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\underset{L_1\to L_1+2L_2}{\sim}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z\end{matrix}\end{array}$$

$\text{rang}(A-5I)=2 \Rightarrow \dim(E_5)=3-2=1$

système associé:

$$\begin{cases}x = 0\\ y-z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_5=\text{Vect}\{(0,1,1)\}}$$

Vérification:

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2-2\\ 0+3+2\\ 0+4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\\ 5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

4. Trouver les espaces propres de $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-3&-2&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&-1&1\\-3&-2-\lambda&3\\-2&-2&3-\lambda\end{bmatrix}\underset{\substack{C_1\to C_1-C_2\\ C_3\to C_3+C_2}}{=}\det\begin{bmatrix}1-\lambda&-1&0\\-1+\lambda&-2-\lambda&1-\lambda\\0&-2&1-\lambda\end{bmatrix}\underset{L_2\to L_2+L_1}{=}\det\begin{bmatrix}1-\lambda&-1&0\\0&-3-\lambda&1-\lambda\\0&-2&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{dév. } C_1}{=}(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}-3-\lambda&1-\lambda\\-2&1-\lambda\end{bmatrix}\underset{L_1\to L_1-L_2}{=}(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}-1-\lambda&0\\-2&1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

$\Rightarrow P_c(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

valeurs propres:

$\boxed{\lambda_1=1}$ (multiplicité $m_1=2$) $\Rightarrow 1\leqslant \dim(E_1)\leqslant 2$

$\boxed{\lambda_2=-1}$ (multiplicité $m_{-1}=1$) $\Rightarrow \dim(E_{-1})=1$

Espaces propres:

$\lambda_1=1$:

$$A-1I=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-3&-2-1&3\\-2&-2&3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ x&y&z\end{array}\end{array}$$

$\text{rang}(A-1I)=1\Rightarrow \dim(E_1)=3-1=2$

système associé:

$$x+y-z=0\iff x=-y+z\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \text{avec } s,t\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \boxed{E_1=\text{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$

Vérification:

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-3&-2&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-1+0\\3-2+0\\2-2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-3&-2&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0+1\\-3+0+3\\-2+0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$A-(-1)I = \begin{bmatrix} -(-1) & -1 & 1 \\ -3 & -2-(-1) & 3 \\ -2 & -2 & 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2\to L_2+3L_1 \\ L_3\to L_3+2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3\to L_3-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2\to -\frac{1}{4}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1\to L_1+L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$\text{rang}(A-(-1)I) = 2 \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 3-2 = 1$

système associé: $\begin{cases} x \quad -\frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3+2 \\ -3-6+6 \\ -2-6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

En résumé, la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ a deux valeurs propres:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ (multiplicité $m_1 = 2$)

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ (multiplicité $m_{-1} = 1$)

espaces propres associées: $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$ avec $\dim(E_1) = 2$

$\boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$ avec $\dim(E_{-1}) = 1$

Affirmation. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (car $\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ ou ...)

Par conséquent, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$A\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_3 = (-1)\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3$$

Par conséquent, la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est :

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Rappel.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\boxed{B = PAP^{-1}}$$

Exemple important.

Les matrices $A_T^{\mathcal{C}}$ et $A_T^{\mathcal{B}}$ sont semblables car on a

$$A_T^{\mathcal{C}} = P\, A_T^{\mathcal{B}}\, P^{-1} \qquad \text{avec } P = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

Théorème.

Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve. A voir : $\det(A-\lambda I) \stackrel{?}{=} \det(B-\lambda I)$

Par hypothèse : $B = PAP^{-1}$

Nous avons :
$$
\begin{aligned}
B-\lambda I &= PAP^{-1} - \lambda I \\
&= PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1} \\
&= P(AP^{-1} - \lambda IP^{-1}) \\
&= P(A-\lambda I)P^{-1}
\end{aligned}
$$

d'où :
$$
\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \det(P(A-\lambda I)P^{-1}) \\
&= \det((A-\lambda I)P^{-1}P) \qquad [\text{Rappel} : \det(CD) = \det(DC)] \\
&= \det(A-\lambda I)
\end{aligned}
$$

Autre possibilité :
$$
\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \det(P(A-\lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A-\lambda I)\det(P^{-1}) \\
&= \det(A-\lambda I)\underbrace{\det(P)\det(P^{-1})}_{=\det(PP^{-1}) = \det(I) = 1} \\
&= \det(A-\lambda I)
\end{aligned}
$$
$\blacksquare$

Conséquence.

Si A et B sont deux matrices semblables, elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Théorème.

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distinctes.

Alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Preuve. On suppose que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est lié.

Par conséquent, l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Soit $p<k$ le plus grand indice tel que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ est linéairement indépendant.

Ainsi, $\vec{v}_{p+1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$:

$$\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

En multipliant à gauche par A on obtient :

$$A\vec{v}_{p+1} = A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p)$$
$$= \alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \dots + \alpha_p A\vec{v}_p$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+1}$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$\lambda_{p+1}\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

Comme $\vec{v}_{p+1}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ on a :

$$\lambda_{p+1}(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

ou encore

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)\vec{v}_1+\alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)\vec{v}_2+\dots+\alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)\vec{v}_p=\vec{0}$$

Comme $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p$ sont linéairement indépendants on a

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)=0,\ \alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)=0,\dots,\ \alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)=0$$

Comme par hypothèse les valeurs propres sont distinctes, on trouve

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\dots,\ \alpha_p=0$$

ce qui implique $\vec{v}_{p+1}=\vec{0}$, en contradiction avec le fait que $\vec{v}_{p+1}$ est un vecteur propre de A. Par conséquent, $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ est linéairement indépendant. ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$.

On dit que A est *diagonalisable* si A est semblable à une matrice diagonale D :

$$\boxed{A=PDP^{-1}\iff AP=PD}$$

Exemple.

La matrice $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-3&-2&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, nous avons vu que A est semblable à $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ les colonnes de P :

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$$

On a $AP = [A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \cdots \ A\vec{v}_n]$

et $PD = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\vec{v}_1 \ \lambda_2\vec{v}_2 \ \cdots \ \lambda_n\vec{v}_n]$

Par conséquent,

$$AP = PD \iff A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j \quad , \text{pour } j = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et les coefficients diagonaux de D, les valeurs propres associées !

Exemples.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Nous avons vu que $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Dans ce cas, nous pouvons construire une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ formée des valeurs propres de A et une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formée de vecteurs propres associés.

Le calcul nous donne $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable car elle peut s'écrire $A = PDP^{-1}$.

En effet,

$$PDP^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix}3 & -12\\ -3 & 2\end{bmatrix}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -12\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 30\\ -5 & -20\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}=A$$

Alternativement, nous pouvons prendre $P=\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ et $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}$:

En effet,

$$PDP^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix}-12 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-12 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 30\\ -5 & -20\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}=A$$

2. Soit $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}$

Nous avons vu que $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ et $\lambda_3=5$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1, λ_2 et λ_3 respectivement. Comme elles sont distinctes, les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ est inversible et nous pouvons écrire

$$A=PDP^{-1}, \quad \text{avec } D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Comme par hypothèse $P = [\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \cdots\ \vec{v_n}]$ est inversible, les colonnes de P sont linéairement indépendantes et forment donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Si λ est une valeur propre de A de multiplicité $m \geq 1$, alors il y a m coefficients diagonaux de D égaux à λ et il y a m colonnes de P associées. Il y a donc m vecteurs linéairement indépendants qui sont des vecteurs propres de A associés à λ, d'où $\dim(E_\lambda) = m$.

<u>Théorème.</u> Soit A une matrice de taille $n \times n$. On a l'équivalence:

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \text{il existe des nombres } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ P_C(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \\ \text{avec } m_1 + \dots + m_k = n \\ \text{et } \dim(E_{\lambda_j}) = m_j, \text{ pour } j = 1, \dots, k \end{cases}$$

<u>Corollaire.</u> Soit A une matrice de taille $n \times n$.
Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable

<u>Preuve.</u> Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les n valeurs propres distinctes de A.
Par construction, elles sont toutes de multiplicité 1, d'où

$P_C(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ et $\dim(E_{\lambda_j}) = 1$ pour $j = 1, \dots, n$. ■

Exemples.

1. $A=\begin{bmatrix}0&4\\4&0\end{bmatrix}$ est diagonalisable.

   En effet, comme $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&4\\4&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-4^2=(\lambda-4)(\lambda+4)$, la matrice A possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1=4$ et $\lambda_2=-4$.

2. $B=\begin{bmatrix}0&5\\0&0\end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

   En effet, comme $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&5\\0&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2$, la matrice B possède une valeur propre $(\lambda=0)$ de multiplicité $m=2$, mais l'espace propre associé E_0 ne satisfait pas $\dim(E_0)=2$ car $\text{rang}(B-0I)=\text{rang}(B)=1$ et $\dim(E_0)=2-1=1<2$.

Méthode de diagonalisation.

Pour déterminer si une matrice A de taille $n\times n$ est diagonalisable :

- Calculer les valeurs propres de A : $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$

  et leurs multiplicités : $m_1,m_2,\dots,m_k$
- Si $m_1+m_2+\dots+m_k<n$ alors A n'est pas diagonalisable.
- Si $m_1+m_2+\dots+m_k=n$ alors :
  - si $\dim(E_{\lambda_j})<m_j$ pour un certain $j\in\{1,\dots,k\}$, alors A n'est pas diagonalisable.
  - si $\dim(E_{\lambda_j})=m_j$ pour tout $j\in\{1,\dots,k\}$, alors A est diagonalisable.

Application: Calcul des puissances de A :

Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$.

Dans certaines situations pratiques, on a besoin de calculer $A^2, A^3, A^4, \ldots$

Si A est diagonalisable, alors on a $A=PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, d'où :

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I}DP^{-1} = P\underbrace{DID}_{=D^2}P^{-1} \Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$$

ce qui implique: $\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$ pour tout $k=1,2,3,\ldots$

Si $D=\begin{bmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}\end{bmatrix}$ alors $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & & 0 \\ & d_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}^k\end{bmatrix}$ et de ce fait,

le calcul de PD^kP^{-1} est plus rapide que celui de A^k.

Exemple.

Nous avons vu que $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4\end{bmatrix}$ est diagonalisable et que nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

d'où

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^k = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1\end{bmatrix}}$$

Remarque. Comme A^k s'écrit comme le produit de trois matrices, cette formule est utile si $k>3$.

$k=3$: $A^3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-27 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-27 & -162\\ -8 & -8\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}27+48 & 162+48\\ -27-8 & -162-8\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}75 & 210\\ -35 & -170\end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix}15 & 42\\ -7 & -34\end{bmatrix}$$

Calcul direct: $A^2 = \begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9-6 & 18-24\\ -3+4 & -6+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & 10\end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9+6 & 18+24\\ 3-10 & 6-40\end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix}15 & 42\\ -7 & -34\end{bmatrix}$$

$k=10$: $A^{10} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{10} & 6\cdot(-3)^{10}\\ -2^{10} & -2^{10}\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-(-3)^{10}+6\cdot 2^{10} & -6\cdot(-3)^{10}+6\cdot 2^{10}\\ (-3)^{10}-2^{10} & 6\cdot(-3)^{10}-2^{10}\end{bmatrix} = \dots$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix}-10581 & -69630\\ 11605 & 70654\end{bmatrix}$$

Valeurs propres et espaces propres d'une application linéaire $T: V \to V$

Définition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $T: V \to V$ une application linéaire quelconque.

Un vecteur non-nul $\vec{v} \in V$ est appelé vecteur propre de T si

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le nombre λ est appelé valeur propre de T et on dit que $\vec{v} \in V$ est un vecteur propre de T associé à λ.

L'espace propre associé à λ, noté E_λ, est le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres associés à λ.

Remarque.

Nous avons vu que pour chaque choix de base $\mathcal{B}=\{\vec{b_1},\dots,\vec{b_n}\}$ de V, nous pouvons construire une matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ associée à T.

Nous pouvons montrer que pour tout choix de base $\mathcal{B}$ de V:

$$\lambda \text{ valeur propre de } T \iff \lambda \text{ valeur propre de } A_T^{\mathcal{B}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\alpha_1\vec{b_1}+\dots+\alpha_n\vec{b_n}\in V\\ \text{vecteur propre de } T\\ \text{associé à } \lambda\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n\\ \text{vecteur propre de } A_T^{\mathcal{B}}\\ \text{associé à } \lambda\end{array}\right.$$

Par conséquent, pour trouver les valeurs propres et les espaces propres de T, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}$ de V et trouver les valeurs propres et les espaces propres de $A_T^{\mathcal{B}}$.

Exemples.

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des applications linéaires suivantes:

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(y,x)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A_T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=A$$

polynôme caractéristique: $p_c(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-1$
$=(\lambda-1)(\lambda+1)$

valeurs propres: $\lambda_1=1$ (multiplicité $m_1=1$)
$\lambda_2=-1$ (multiplicité $m_{-1}=1$)

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$: $A - 1\,I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé : $x - y = 0 \iff x = y \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

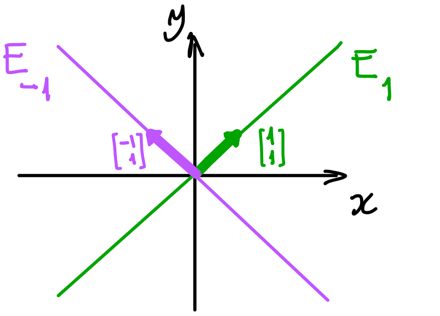
$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = -1$: $A - (-1)\,I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé : $x + y = 0 \iff x = -y \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ainsi, T est la symétrie d'axe $y = -x$ par rapport à la droite $y = x$.



2. $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$, $a + bx \longmapsto b + ax$ base canonique de $\mathbb{P}_1$: $\mathcal{E} = \{1, x\}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = \varphi(1 + 0x) = 0 + 1x = 0 \cdot 1 + 1\,x \\ \varphi(x) = \varphi(0 + 1x) = 1 + 0x = 1 \cdot 1 + 0\,x \end{array}\right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

(même matrice que pour l'exemple 1)

$\Rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_1 = 1$ $\iff$ $p_1(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1 + x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\{1 + x\} \subset \mathbb{P}_1$

$\lambda_2 = -1$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_2 = -1$ $\iff$ $p_2(x) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x = -1 + x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\{-1 + x\} \subset \mathbb{P}_1$