

Théorème.

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *distinctes*.

Alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Preuve. On suppose que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est lié.

Par conséquent, l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Soit $p < k$ le plus grand indice tel que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ est linéairement indépendant.

Ainsi, \vec{v}_{p+1} peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$:

$$\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

En multipliant à gauche par A on obtient :

$$\begin{aligned} A\vec{v}_{p+1} &= A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) \\ &= \alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \dots + \alpha_p A\vec{v}_p \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+1}$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$\lambda_{p+1} \vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

Comme \vec{v}_{p+1} s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ on a :

$$\lambda_{p+1} (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

ou encore

$$\alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1)\vec{v}_1 + \alpha_2(\lambda_{p+1} - \lambda_2)\vec{v}_2 + \dots + \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p)\vec{v}_p = \vec{0}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont linéairement indépendants on a

$$\alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1) = 0, \alpha_2(\lambda_{p+1} - \lambda_2) = 0, \dots, \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p) = 0$$

Comme par hypothèse les valeurs propres sont distinctes, on trouve

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_p = 0$$

ce qui implique $\vec{v}_{p+1} = \vec{0}$, en contradiction avec le

fait que \vec{v}_{p+1} est un vecteur propre de A . Par conséquent,

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est linéairement indépendant. ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale D :

$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD$$

Exemple.

La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, nous avons vu que A est semblable à $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ les colonnes de P :

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$$

$$\text{On a } AP = [A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n]$$

$$\text{et } PD = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{v}_1 \ \lambda_2 \vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n \vec{v}_n]$$

Par conséquent,

$$AP = PD \iff A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \text{ pour } j=1, \dots, n.$$

Autrement dit, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et les coefficients diagonaux de D , les valeurs propres associées!

Exemples.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Nous avons vu que $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Dans ce cas, nous pouvons construire une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ formée des valeurs propres de A et une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formée de vecteurs propres associés.

Le calcul nous donne $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable car elle peut s'écrire $A = PDP^{-1}$.

En effet,

$$PDP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Alternativement, nous pouvons prendre $P = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}:$$

En effet,

$$PDP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

$$2. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons vu que $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ et $\lambda_3=5$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1 , λ_2 et λ_3 respectivement. Comme elles sont distinctes, les vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 sont linéairement indépendants.

Par conséquent, la matrice $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Comme par hypothèse $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ est inversible, les colonnes de P sont linéairement indépendantes et forment donc une base de \mathbb{R}^n .

Si λ est une valeur propre de A de multiplicité $m \geq 1$, alors il y a m coefficients diagonaux de D égaux à λ et il y a m colonnes de P associées. Il y a donc m vecteurs linéairement indépendants qui sont des vecteurs propres de A associés à λ , d'où $\dim(E_\lambda) = m$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. On a l'équivalence:

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe des nombres } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ p_c(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \\ \text{avec } m_1 + \dots + m_k = n \\ \text{et } \dim(E_{\lambda_j}) = m_j, \text{ pour } j=1, \dots, k \end{cases}$$

Corollaire. Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Si A possède n valeurs propres *distinctes* alors A est diagonalisable

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les n valeurs propres distinctes de A .

Par construction, elles sont toutes de multiplicité 1 , d'où

$$p_c(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \text{ et } \dim(E_{\lambda_j}) = 1 \text{ pour } j=1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Exemples.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, comme $P_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4^2 = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$, la matrice A possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$.

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

En effet, comme $P_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 5 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$, la matrice B possède une valeur propre ($\lambda = 0$) de multiplicité $m = 2$, mais l'espace propre associé E_0 ne satisfait pas $\dim(E_0) = 2$ car $\text{rang}(B - 0I) = \text{rang}(B) = 1$ et $\dim(E_0) = 2 - 1 = 1 < 2$.

Méthode de diagonalisation.

Pour déterminer si une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable :

- Calculer les valeurs propres de A : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

et leurs multiplicités : m_1, m_2, \dots, m_k

- Si $m_1 + m_2 + \dots + m_k < n$ alors A n'est pas diagonalisable.

- Si $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ alors :

• si $\dim(E_{\lambda_j}) < m_j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, k\}$,

alors A n'est pas diagonalisable.

• si $\dim(E_{\lambda_j}) = m_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors A est diagonalisable.

Application: Calcul des puissances de A :

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Dans certaines situations pratiques, on a besoin de calculer A^2, A^3, A^4, \dots

Si A est diagonalisable, alors on a $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, d'où :

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I} DP^{-1} = P \underbrace{DID}_{=D^2} P^{-1} \Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$$

ce qui implique:

$$A^k = PD^k P^{-1}$$

pour tout $k=1, 2, 3, \dots$

Si $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \dots \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$ alors $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & d_{22}^k & \dots \\ 0 & & d_{nn}^k \end{bmatrix}$ et de ce fait,

le calcul de $PD^k P^{-1}$ est plus rapide que celui de A^k .

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et que nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque. Comme A^k s'écrit comme le produit de trois matrices, cette formule est utile si $k > 3$.

$$\underline{k=3}: A^3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -162 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 27+48 & 162+48 \\ -27-8 & -162-8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 75 & 210 \\ -35 & -170 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 42 \\ -7 & -34 \end{bmatrix}$$

Calcul direct: $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-6 & 18-24 \\ -3+4 & -6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+6 & 18+24 \\ 3-10 & 6-40 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 42 \\ -7 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k=10}: A^{10} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{10} & 6 \cdot (-3)^{10} \\ -2^{10} & -2^{10} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -(-3)^{10} + 6 \cdot 2^{10} & -6 \cdot (-3)^{10} + 6 \cdot 2^{10} \\ (-3)^{10} - 2^{10} & 6 \cdot (-3)^{10} - 2^{10} \end{bmatrix} = \dots$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} -10581 & -69630 \\ 11605 & 70654 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres et espaces propres d'une application linéaire $T: V \rightarrow V$

Définition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $T: V \rightarrow V$ une application linéaire quelconque.

Un vecteur non-nul $\vec{v} \in V$ est appelé vecteur propre de T si

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le nombre λ est appelé valeur propre de T et on dit que $\vec{v} \in V$ est un vecteur propre de T associé à λ .

L'espace propre associé à λ , noté E_λ , est le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres associés à λ .

Remarque.

Nous avons vu que pour chaque choix de base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ de V , nous pouvons construire une matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ associée à T .

Nous pouvons montrer que pour tout choix de base \mathcal{B} de V :

λ valeur propre de $T \iff \lambda$ valeur propre de $A_T^{\mathcal{B}}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \in V \\ \text{vecteur propre de } T \\ \text{associé à } \lambda \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \text{vecteur propre de } A_T^{\mathcal{B}} \\ \text{associé à } \lambda \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour trouver les valeurs propres et les espaces propres de T , il suffit de choisir une base \mathcal{B} de V et trouver les valeurs propres et les espaces propres de $A_T^{\mathcal{B}}$.

Exemples.

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des applications linéaires suivantes:

$$1. T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

$$\text{base canonique de } \mathbb{R}^2: \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\text{polynôme caractéristique: } p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 \\ = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\text{valeurs propres: } \lambda_1 = 1 \quad (\text{multiplicité } m_1 = 1)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (\text{multiplicité } m_{-1} = 1)$$

Espaces propres:

$$\underline{\lambda_1=1}: A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x \downarrow$ $y \downarrow$

ystème associé: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

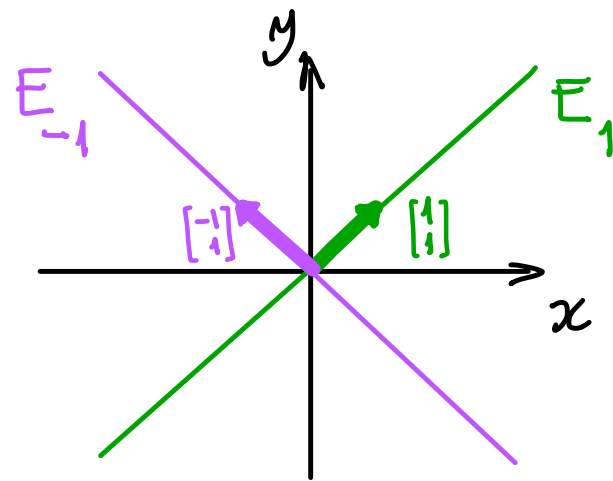
$$\underline{\lambda_2=-1}: A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x \downarrow$ $y \downarrow$

ystème associé: $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ainsi, T est la symétrie d'axe $y = -x$
par rapport à la droite $y = x$.



2. $\varphi: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ base canonique de \mathbb{P}_1 : $\mathcal{E} = \{1, x\}$
 $a+bx \longmapsto b+ax$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(1) = \varphi(1+0x) = 0+1x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ \varphi(x) = \varphi(0+1x) = 1+0x = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

(même matrice que pour l'exemple 1)

\Rightarrow valeurs propres: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

Espaces propres:

$\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_1 = 1$ \Leftrightarrow $p_1(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1+x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow E_1 = \text{Vect} \{1+x\} \subset \mathbb{P}_1$

$\lambda_2 = -1$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_2 = -1$ \Leftrightarrow $p_2(x) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x = -1+x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect} \{-1+x\} \subset \mathbb{P}_1$