Remarques.

- Si $\det(A) = 0$, alors $\lambda = 0$ est une racine de $p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

  Ainsi, nous avons l'équivalence:

  A n'est pas inversible $\Longleftrightarrow$ $\lambda = 0$ est une valeur propre de A

- Si A est triangulaire, alors $A - \lambda I_n$ est aussi triangulaire:

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

  d'où: $p_c(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

  Dans ce cas, les valeurs propres de A se trouvent sur la diagonale.

Calcul des vecteurs propres.

Rappel.

$\vec{v} \neq \vec{0}$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ $\iff$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ solution de $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$\iff$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. L'espace propre de A associé à λ noté E_λ, est défini par

$$\boxed{E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)}$$

Ainsi, par définition, l'espace propre de A associé à λ contient tous les vecteurs propres de A associés à λ ainsi que le vecteur zéro.

Remarques.

- Par construction, $\dim(E_\lambda) > 0$ (car $\operatorname{rang}(A-\lambda I_n) < n$).

  Par conséquent, si lors d'un calcul on trouve $\dim(E_\lambda) = 0$, cela veut dire que λ n'est pas une valeur propre de A !

- Soit m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $p_c(\lambda)$.

  [p.ex. si $p_c(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-5)(\lambda+4)^3$ alors $m_3 = 2$, $m_5 = 1$ et $m_{-4} = 3$]

  On peut montrer que $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$, d'où

$$\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda}$$

  En particulier, si λ est une racine simple de $p_c(\lambda)$ nous avons $m_\lambda = 1$ et $\dim(E_\lambda) = 1$.

- Le nombre $\dim(E_\lambda)$ est parfois appelé multiplicité géométrique de la valeur propre λ de A.
- Le nombre m_λ est parfois appelé multiplicité algébrique de la valeur propre λ de A.

Exemples.

1. Trouver les espaces propres de $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix}=\ldots=(\lambda+3)(\lambda-2)$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1=-3}$ et $\boxed{\lambda_2=2}$

Comme $m_{-3}=1$ et $m_2=1$, on s'attend à trouver $\dim(E_{-3})=1$ et $\dim(E_2)=1$

$\lambda_1=-3$: $A-(-3)I=\begin{bmatrix} 3-(-3) & 6 \\ -1 & -4-(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow \\ x\ \ \ y \end{array}$

$\operatorname{rang}(A+3I)=1 \Rightarrow \dim(E_{-3})=2-1=1$

système associé : $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-3}=\operatorname{Vect}\{(-1,1)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+6 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 3-2 & 6 \\ -1 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$$

$\text{rang}(A-2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$

système associé : $x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -6y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_2 = \text{Vect}\{(-6,1)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18+6 \\ 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Trouver les espaces propres de $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ldots = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 2}$ et $\boxed{\lambda_2 = 4}$

Comme $m_2 = 1$ et $m_4 = 1$, on s'attend à trouver

$$\dim(E_2) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(E_4) = 1$$

$\lambda_1 = 2$: $B - 2I = \begin{bmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$$

$\operatorname{rang}(B - 2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$

système associé : $3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_2 = \operatorname{Vect}\{(1,3)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 4$: $B - 4I = \begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \underset{\uparrow\,x \quad \uparrow\,y}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

$\mathrm{rang}(B-4I) = 1 \Rightarrow \dim(E_4) = 2 - 1 = 1$

système associé : $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_4 = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ldots = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$, $\boxed{\lambda_3 = 5}$

Comme $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ et $m_5 = 1$ on s'attend à trouver

$$\dim(E_1) = 1, \quad \dim(E_2) = 1 \text{ et } \dim(E_5) = 1$$

$\underline{\lambda_1 = 1 :}$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 4-1 & 2 & -2 \\ -5 & 3-1 & 2 \\ -2 & 4 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{8}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$$\text{rang}(A - I) = 2 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 2 = 1$$

système associé :

$$\begin{cases} x \quad -\frac{1}{2}z = 0 \\ \quad y - \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \text{Vect}\{(2,1,4)\}}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2-8 \\ -10+3+8 \\ -4+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Remarque. Il est possible ici de faire des opérations élémentaires sur les lignes de sorte à éviter les fractions :

$$A - 1I \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{2} L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

système associé :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et l'on retrouve la même solution générale.

$\lambda_2 = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4-2 & 2 & -2 \\ -5 & 3-2 & 2 \\ -2 & 4 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{6}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{rang}(A - 2I) = 2 \Rightarrow \dim(E_2) = 3 - 2 = 1$$

système associé :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \text{Vect}\{(1,1,2)\}}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2-4 \\ -5+3+4 \\ -2+4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4-5 & 2 & -2 \\ -5 & 3-5 & 2 \\ -2 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to -L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to -\frac{1}{12}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$\text{rang}(A - 5I) = 2 \Rightarrow \dim(E_5) = 3 - 2 = 1$

système associé:

$$\begin{cases} x & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_5 = \text{Vect}\{(0,1,1)\}}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ 0+3+2 \\ 0+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_3 \to C_3 + C_2}}{=} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1+\lambda & -2-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 + L_1}{=} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{dév. } C_1}{=} (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{=} (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

$$\Rightarrow P_c(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

valeurs propres :

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ (multiplicité $m_1 = 2$) $\Rightarrow 1 \leqslant \dim(E_1) \leqslant 2$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ (multiplicité $m_{-1} = 1$) $\Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1$

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2-1 & 3 \\ -2 & -2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{rang}(A - 1I) = 1 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 1 = 2$$

système associé :

$$x + y - z = 0 \iff x = -y + z \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \text{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 3 - 2 + 0 \\ 2 - 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + 1 \\ -3 + 0 + 3 \\ -2 + 0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$A-(-1)I = \begin{bmatrix} -(-1) & -1 & 1 \\ -3 & -2-(-1) & 3 \\ -2 & -2 & 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{4}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$\text{rang}(A-(-1)I) = 2 \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 3 - 2 = 1$

système associé: $\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3+2 \\ -3-6+6 \\ -2-6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

En résumé, la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ a deux valeurs propres :

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ (multiplicité $m_1 = 2$)

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ (multiplicité $m_{-1} = 1$)

espaces propres associées : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$ avec $\dim(E_1) = 2$

$\boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$ avec $\dim(E_{-1}) = 1$

<u>Affirmation</u>. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (car $\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ ou ...)

Par conséquent, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$A\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_3 = (-1)\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3$$

Par conséquent, la matrice associée à l'application linéaire

$$T : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} \mapsto A\vec{v} \end{array}$$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est :

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Rappel.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\boxed{B = PAP^{-1}}$$

Exemple important.

Les matrices A_T^C et A_T^B sont semblables car on a

$$A_T^C = P A_T^B P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P^{CB}$$

Théorème.

Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve.

A voir : $\det(A-\lambda I) \overset{?}{=} \det(B-\lambda I)$

Par hypothèse : $B = PAP^{-1}$

Nous avons :

$$\begin{aligned} B-\lambda I &= PAP^{-1} - \lambda I \\ &= PAP^{-1} - \lambda P I P^{-1} \\ &= P(AP^{-1} - \lambda I P^{-1}) \\ &= P(A-\lambda I)P^{-1} \end{aligned}$$

d'où :

$$\det(B-\lambda I) = \det(P(A-\lambda I)P^{-1})$$
$$= \det((A-\lambda I)P^{-1}P) \qquad [\text{Rappel: } \det(CD)=\det(DC)]$$
$$= \det(A-\lambda I)$$

Autre possibilité :

$$\det(B-\lambda I) = \det(P(A-\lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A-\lambda I)\det(P^{-1})$$
$$= \det(A-\lambda I)\underbrace{\det(P)\det(P^{-1})}_{=\det(PP^{-1}) = \det(I) = 1}$$
$$= \det(A-\lambda I) \qquad \blacksquare$$

Conséquence.

Si A et B sont deux matrices semblables, elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.