5. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous allons considérer seulement des applications linéaires de la forme $T: V \longrightarrow V$.

Dans beaucoup de situations pratiques, il est utile de déterminer les vecteurs $\vec{v} \in V$ pour lesquels $T(\vec{v})$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad , \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit qu'un vecteur non-nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si le vecteur $A\vec{v}$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}} \qquad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}$$

Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé valeur propre de A et on dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple.

Le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -3$. En effet,

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 \\ -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A\vec{v} = -3\vec{v}$$

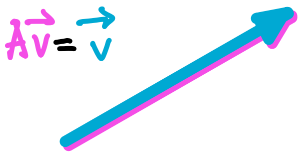
Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Soit A une matrice carrée (2×2 ou 3×3) et $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de A,

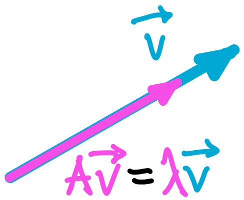
Soit $\vec{v}\neq\vec{0}$ un vecteur propre de A associé à λ.

- Si $\lambda>1$ alors A dilate $\vec{v}$:

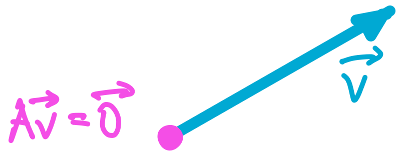
- Si $\lambda=1$ alors A fixe $\vec{v}$:



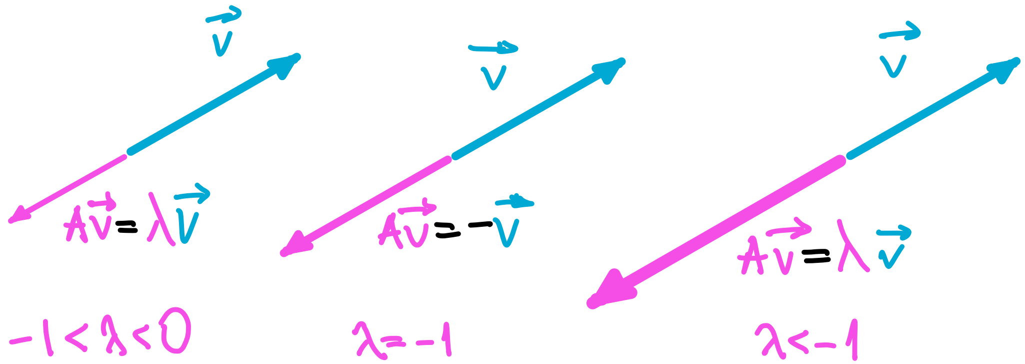
- Si $0<\lambda<1$ alors A contracte $\vec{v}$:



- Si $\lambda=0$ alors A annule $\vec{v}$:



- Si $\lambda<0$ alors A inverse la direction de $\vec{v}$:



Calcul des valeurs propres.

On a $A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{= I_n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}}$$

Conséquence.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} \neq \vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda\end{array}\right\} \iff \vec{v} \neq \vec{0} \text{ solution de } (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$

$\iff \vec{v} \neq \vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)$

$\iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

possède une infinité de solutions

$\iff \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I_n)) > 0$

$\iff n - \mathrm{rang}(A - \lambda I_n) > 0$

$\iff \mathrm{rang}(A - \lambda I_n) < n$

$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le polynôme caractéristique de A, noté $P_c(\lambda)$, est défini par

$$\boxed{P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n dans la variable λ.

Théorème. Nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff P_c(\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est une racine de } P_c \end{aligned}$$

Exemples.

1. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) - 6(-1)$$

$$= -12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1 = -3}$ et $\boxed{\lambda_2 = 2}$

2. Trouver les valeurs propres de $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - 3(-1)$$

$$= 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 2}$ et $\boxed{\lambda_2 = 4}$

3. Trouver les valeurs propres de $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) - 5(-1)$$

$$= \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1$$

$\Rightarrow$ C n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Par contre, comme $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$, alors

$\boxed{\lambda_1 = i}$ et $\boxed{\lambda_2 = -i}$ sont les valeurs propres de C dans $\mathbb{C}$.

4. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & 5-\lambda \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_3}{=} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_3}{=} (5-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\left[(4-\lambda)(-1-\lambda) - 2(-3)\right] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4 + 6)$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (5-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$, $\boxed{\lambda_3 = 5}$