

---

## 4. Espaces vectoriels

---

### 4.1. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $V$  un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *vecteurs* sur lequel sont définis deux opérations appelées *addition* et *multiplication par un scalaire*.

On dit que  $V$  est un *espace vectoriel* si les dix axiomes suivants sont satisfaits :

1. La somme de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , notée  $\vec{u} + \vec{v}$ , est un élément de  $V$ .
2. L'addition est commutative :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ , pour tout  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ .
3. L'addition est associative :  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ , pour tout  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ .
4. Il existe un élément  $\vec{0} \in V$ , appelé *vecteur zéro*, tel que  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ , pour tout  $\vec{v} \in V$ .
5. Pour chaque  $\vec{v} \in V$  il existe un élément  $-\vec{v} \in V$  tel que  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ .
6. Le multiple scalaire de  $\vec{v}$  par  $\alpha \in \mathbb{R}$ , noté  $\alpha\vec{v}$ , est un élément de  $V$ .
7. Si  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ .
8. Si  $\vec{v} \in V$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors  $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ .
9. Si  $\vec{v} \in V$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors  $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$ .
10. Si  $\vec{v} \in V$  alors  $1\vec{v} = \vec{v}$ .

### Remarques.

- A l'aide de ces axiomes, nous pouvons montrer que le vecteur  $\vec{0}$  de l'axiome 4 est unique. En effet, supposons que  $\vec{w}$  est un vecteur de  $V$  qui satisfait

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{v} \quad \text{pour tout } \vec{v} \in V.$$

Comme cette propriété est valable pour  $\vec{v} = \vec{0}$ , nous avons

$$\vec{0} + \vec{w} = \vec{0}.$$

L'axiome 2 nous donne alors

$$\vec{w} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Comme l'axiome 4 nous donne aussi  $\vec{w} + \vec{0} = \vec{w}$ , nous avons bien  $\vec{w} = \vec{0}$ .

- De manière analogue nous pouvons montrer que le vecteur  $-\vec{v}$  de l'axiome 5 est unique pour chaque choix de  $\vec{v}$ . Il est appelé *opposé* de  $\vec{v}$ .
- Pour montrer qu'un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il faut montrer qu'il vérifie tous les dix axiomes (voir exemples 1–9 plus bas).
- Si un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire *ne satisfait pas* au moins un des axiomes, alors l'ensemble *n'est pas* un espace vectoriel (voir exemple 10 plus bas).

## Exemples

### 1. Le plan $\mathbb{R}^2$ formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

- *addition* :

si  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , alors 
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- *multiplication par un scalaire* :

si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors 
$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro :  $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

### 2. L'espace $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x, y, z \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

- *addition* :

si  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , alors 
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- *multiplication par un scalaire* :

si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors 
$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro :  $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  des  $n$ -tuples

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n,$$

muni des opérations :

• *addition* :

$$\text{si } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \text{ alors} \quad \vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

• *multiplication par un scalaire* :

$$\text{si } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors} \quad \lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. L'ensemble  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  des matrices de taille  $2 \times 2$  à coefficients réels

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a_{jk} \in \mathbb{R},$$

muni des opérations :

• *addition* :

si  $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ , alors

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. L'ensemble  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels muni des opérations :

• *addition* :

si  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , alors

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

6. L'ensemble  $\mathbb{P}_2$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

muni des opérations :

• *addition* :

si  $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  et  $q(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ , alors

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \\ &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_2 \end{aligned}$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} (\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\ &= (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_2 \end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro :  $p(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$

7. L'ensemble  $\mathbb{P}_n$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec  $a_j \in \mathbb{R}$  pour  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , muni des opérations :

• *addition* :

si  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  et  $q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ , alors

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_n\end{aligned}$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned}(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= (\lambda a_n)x^n + \dots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_n\end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro :  $p(x) = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$

8. L'ensemble  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions réelles d'une variable réelle muni des opérations :

• *addition* :

si  $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , alors

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro :  $f(x) = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$

9. L'ensemble  $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  des nombres réels positifs muni des opérations :

• *addition* :

si  $x, y \in V$ , alors

$$x \oplus y = xy$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $x \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda \odot x = x^\lambda$$

est un espace vectoriel. Pour le voir, nous devons vérifier que  $V$  satisfait les dix axiomes :

1. Si  $x, y \in V$ , alors  $x > 0$ ,  $y > 0$  et  $x \oplus y = xy > 0$ . Par conséquent,  $x \oplus y \in V$ .

2. L'addition est commutative :

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x, \quad \text{pour tout } x, y \in V.$$

3. L'addition est associative :

$$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (yz) = x \oplus (y \oplus z), \quad \text{pour tout } x, y, z \in V.$$

4. Le *vecteur zéro* est le nombre réel 1 car

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

5. L'opposé de  $x$  est  $\frac{1}{x}$  car

$$x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

6. Si  $x \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $x > 0$  et  $\lambda \odot x = x^\lambda > 0$ . Par conséquent,  $\lambda \odot x \in V$ .

7. Si  $x, y \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).$$

8. Si  $x \in V$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors

$$(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha x^\beta = (x^\alpha) \oplus (x^\beta) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x).$$

9. Si  $x \in V$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors

$$(\alpha\beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \odot (x^\beta) = \alpha \odot (\beta \odot x).$$

10. Si  $x \in V$  alors

$$1 \odot x = x^1 = x, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

10. Le plan  $\mathbb{R}^2$  muni des opérations suivantes :

• *addition* :

si  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

• *multiplication par un scalaire* :

si  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

*n'est pas* un espace vectoriel.

En effet, malgré le fait que les axiomes 1–9 sont satisfaits avec cette multiplication par un scalaire modifiée, l'axiome 10 ne l'est pas :

$$\text{si } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ avec } x_2 \neq 0, \text{ alors } 1\vec{x} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{x}.$$

Les propositions suivantes sont une conséquence directe de la définition d'espace vectoriel :

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ .

**a)** Si  $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$  alors  $\vec{u} = \vec{v}$  (simplification à droite).

**b)** Si  $\vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$  alors  $\vec{u} = \vec{v}$  (simplification à gauche).

*Preuve.*

**a)** Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{w} &= \vec{v} + \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{w}) + (-\vec{w}) &= (\vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{w}) \\ \vec{u} + (\vec{w} + (-\vec{w})) &= \vec{v} + (\vec{w} + (-\vec{w})) && \text{par (3)} \\ \vec{u} + \vec{0} &= \vec{v} + \vec{0} && \text{par (5)} \\ \vec{u} &= \vec{v} && \text{par (4)} \end{aligned}$$

**b)** Comme l'axiome (2) nous donne

$$\vec{w} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w},$$

nous avons le résultat en utilisant la partie a). ■

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Si  $\vec{v} \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors

a)  $0\vec{v} = \vec{0}$

b)  $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

c)  $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

*Preuve.*

a) Nous avons  $0\vec{v} + 0\vec{v} = (0 + 0)\vec{v}$  par (8)

$$0\vec{v} + 0\vec{v} = 0\vec{v}$$

$$(0\vec{v} + 0\vec{v}) + (-0\vec{v}) = 0\vec{v} + (-0\vec{v})$$

$$0\vec{v} + (0\vec{v} + (-0\vec{v})) = 0\vec{v} + (-0\vec{v}) \quad \text{par (3)}$$

$$0\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{par (5)}$$

$$0\vec{v} = \vec{0} \quad \text{par (4)}$$

b) Nous avons  $\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0})$  par (7)

$$\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} = \alpha\vec{0} \quad \text{par (4)}$$

$$(\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}) + (-\alpha\vec{0}) = \alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0})$$

$$\alpha\vec{0} + (\alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0})) = \alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0}) \quad \text{par (3)}$$

$$\alpha\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{par (5)}$$

$$\alpha\vec{0} = \vec{0} \quad \text{par (4)}$$

c) Nous devons montrer que  $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$  pour tout  $\vec{v} \in V$  :

$$\vec{v} + (-1)\vec{v} = 1\vec{v} + (-1)\vec{v} \quad \text{par (10)}$$

$$\vec{v} + (-1)\vec{v} = (1 + (-1))\vec{v} \quad \text{par (8)}$$

$$\vec{v} + (-1)\vec{v} = 0\vec{v}$$

$$\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{par la partie a) } \blacksquare$$

**Remarque.** Dans l'espace vectoriel de l'exemple 9,

- la propriété  $0\vec{v} = \vec{0}$  s'écrit  $x^0 = 1$
- la propriété  $\alpha\vec{0} = \vec{0}$  s'écrit  $1^\alpha = 1$
- la propriété  $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$  s'écrit  $x^{-1} = \frac{1}{x}$

## Combinaisons linéaires

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Un vecteur  $\vec{v}$  de  $V$  est une *combinaison linéaire* des vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  de  $V$  s'il peut s'écrire sous la forme

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Les nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont appelés *ponds* (ou *coefficients*) de la combinaison linéaire.

### Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$  et soient  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Comme

$$3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v},$$

le vecteur  $\vec{v}$  est combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  avec poids respectifs  $\alpha_1 = 3$  et  $\alpha_2 = 2$ .

2. Soit  $V = \mathbb{P}_2$  et soient  $p_1(x) = 2x^2 + 3$ ,  $p_2(x) = x^2 - x$ . Comme

$$4p_1(x) + (-8)p_2(x) = 4(2x^2 + 3) + (-8)(x^2 - x) = 8x + 12,$$

le polynôme  $p(x) = 8x + 12$  est combinaison linéaire de  $p_1$  et  $p_2$  avec poids respectifs  $\alpha_1 = 4$  et  $\alpha_2 = -8$ .

## Indépendance linéaire

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  des vecteurs de  $V$ .

Les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) si la seule solution de l'équation

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

est la solution nulle (ou triviale) :

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Si par contre, il existe des poids  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (\star)$$

on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* (ou *liés*) et dans ce cas,  $(\star)$  est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

**Remarque.** Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur  $\vec{0}$  est toujours linéairement dépendant car

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + 0 \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{et } (1, 0, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, 0, \dots, 0).$$

## Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$ . Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} &\iff \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Par contre, les vecteurs

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \alpha_3 \vec{w}_3 = \vec{0} &\iff \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$(-2)\vec{w}_1 + 1\vec{w}_2 + (-1)\vec{w}_3 = \vec{0}.$$

3. Soit  $V = \mathbb{P}_2$ . Les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 &\iff \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, les polynômes

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x^2 + 3, \quad q_3(x) = 2x + 3, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement dépendants car

$$1q_1(x) + (-1)q_2(x) + 1q_3(x) = 0.$$

4. Soit  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x)$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \sin(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

nous avons en particulier, en prenant  $x = 0$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \sin(0) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Par contre, les fonctions

$$g_1(x) = \cos^2(x), \quad g_2(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g_3(x) = \cos(2x)$$

sont linéairement dépendantes car nous savons que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \iff 1g_1(x) + (-1)g_2(x) + (-1)g_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5. Soit  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(3x) \quad \text{et} \quad f_3(x) = \cos^3(x)$$

sont linéairement dépendantes. En effet, nous savons que

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \iff 3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alternativement, nous pouvons résoudre

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \cos(3x) + \alpha_3 \cos^3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$  et  $x = \frac{\pi}{3}$  nous obtenons le système homogène

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \cos(0) + \alpha_3 \cos^3(0) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \alpha_2 \cos(\pi) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Comme la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

nous retrouvons la relation de dépendance linéaire

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

### **Théorème.** (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  des vecteurs de  $V$  (avec  $k \geq 2$ ).

L'ensemble  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de  $\mathcal{S}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

*Preuve.* Analogue au cas  $V = \mathbb{R}^n$  traité au chapitre 1. ■

**Corollaire.** Si l'ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  est linéairement dépendant alors l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$  est linéairement dépendant *pour n'importe quel choix de  $\vec{v} \in V$ .*

*Preuve.* Si  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  est linéairement dépendant, alors au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Supposons que  $\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$ . Nous avons donc

$$\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \dots + \beta_n \vec{v}_n + 0\vec{v}.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$  est linéairement dépendant. ■

**Corollaire.** Si  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants alors tout sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{S}$  est formé de vecteurs linéairement indépendants.

*Preuve.* Supposons qu'un sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{S}$  est formé de vecteurs linéairement dépendants. Le corollaire précédent entraîne que l'ensemble  $\mathcal{S}$  est aussi formé de vecteurs linéairement dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ■

## Sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $W \subset V$  un sous-ensemble non-vide de  $V$ .

On dit que  $W$  est un *sous-espace vectoriel de  $V$*  si  $W$  est lui-même un espace vectoriel avec les mêmes opérations d'addition et multiplication par un scalaire.

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $W \subset V$  un sous-ensemble de  $V$ .

Alors  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

0. Le vecteur zéro  $\vec{0}$  de  $V$  est contenu dans  $W$ .

1. Si  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$  alors  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

2. Si  $\vec{w} \in W$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda\vec{w} \in W$

En d'autres termes,  $W \subset V$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  si toute combinaison linéaire d'éléments de  $W$  est un élément de  $W$ .

*Preuve.* Les conditions 0, 1 et 2 correspondent aux axiomes 4, 1 et 6 respectivement.

En prenant  $\lambda = -1$ , la condition 2 nous donne l'axiome 5 :

$$\text{si } \vec{w} \in W \text{ alors } -\vec{w} = (-1)\vec{w} \in W.$$

Les autres axiomes restent valables sur  $W$  car ils le sont dans  $V$ . ■

## Remarques.

• Si  $V$  est un espace vectoriel, alors  $V$  est le plus grand sous-espace vectoriel de  $V$  et l'ensemble  $\{\vec{0}\} \subset V$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $V$ . En effet, nous avons

$$\vec{0} \in \{\vec{0}\}, \quad \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{0} = \vec{0} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

• Pour montrer qu'un ensemble non-vide est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est plus simple à faire.

## Exemples

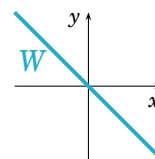
1. L'ensemble  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, le vecteur  $(0, 0)$  est dans  $W$  et comme les éléments de  $W$  sont de la forme  $(x, -x)$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons :

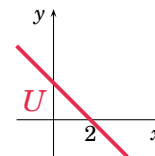
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \in W,$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ -\lambda x \end{bmatrix} \in W.$$

$W \subset \mathbb{R}^2$  est la droite de pente  $-1$  qui passe par l'origine.



2. L'ensemble  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$  *n'est pas* un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, il suffit de constater que  $(0, 0) \notin U$ .

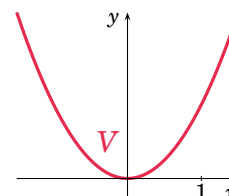


$U \subset \mathbb{R}^2$  est la droite de pente  $-1$  qui passe par  $(0, 2)$ .

3. L'ensemble  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  *n'est pas* un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  même si  $(0, 0) \in V$ . En effet, les éléments de  $V$  sont de la forme  $(x, x^2)$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda x \\ (\lambda x)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général}$$



4. L'ensemble  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car la somme de deux fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire reste continue.

5. L'ensemble  $\mathbb{P}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour tout  $n = 0, 1, 2, \dots$

6. L'ensemble  $\mathbb{P}_k$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

### Sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

Soit  $A = [a_{jk}]$  une matrice de taille  $m \times n$ .

L'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 & (2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 & (m) \end{cases}$$

forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , noté  $\text{Nul}(A)$  :

$$\text{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

En effet, nous commençons par remarquer que  $(0, 0, \dots, 0) \in \text{Nul}(A)$ .

Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Nul}(A)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0} \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \vec{x} + \vec{y} \in \text{Nul}(A) \\ \lambda\vec{x} \in \text{Nul}(A) \end{cases}$$

**Attention :** Si  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , alors les solutions du système inhomogène

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

*ne forment pas* de sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  car  $\vec{x} = \vec{0}$  n'est pas solution du système.

## Sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs

Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs de  $V$ . L'ensemble

$$W = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

formé de toutes les combinaisons linéaires de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

En effet, nous commençons par remarquer que  $\vec{0} \in V$  est dans  $W$  car  $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$ .

Soient  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$  et  $\vec{w} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2$  deux éléments de  $W$ . Nous avons :

$$\vec{v} + \vec{w} = (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) + (\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2) = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{v}_2 \in W$$

$$\lambda \vec{v} = \lambda(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = (\lambda \alpha_1) \vec{v}_1 + (\lambda \alpha_2) \vec{v}_2 \in W$$

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ .

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  appelé *sous-espace vectoriel engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$* , noté  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ .

**Définition.** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  et soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_p \in W$ .

L'ensemble  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  est appelé un *système de générateurs de  $W$*  si tout vecteur de  $W$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_p$ , autrement dit, si

$$W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}.$$

**Remarque.** Si  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , alors  $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

## Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$ . Considérons les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  sont de la forme

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

D'autre part, comme

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est un système de générateurs de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Soit  $V = \mathbb{P}_2$ . Considérons les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Les éléments de  $\text{Vect}\{p_1, p_2\}$  sont de la forme

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}\{p_1, p_2\} = \mathbb{P}_1.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{p_1, p_2\}$  est un système de générateurs de  $\mathbb{P}_1$ .

D'autre part, comme

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbb{P}_2.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{p_1, p_2, p_3\}$  est un système de générateurs de  $\mathbb{P}_2$ .

## 4.2. Bases et dimension

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  des vecteurs de  $V$ .

L'ensemble de vecteurs  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  est une *base de  $V$*  si et seulement si

1. l'ensemble  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  est linéairement indépendant,
2. l'ensemble  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  est un système de générateurs de  $V$  :

$$V = \text{Vect } \mathcal{B} = \text{Vect}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}.$$

### Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$ .

Les vecteurs  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  sont linéairement indépendants.

De plus, comme

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad \text{pour tout } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

les vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  engendrent  $V = \mathbb{R}^3$ .

Par conséquent, ils forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , appelée *base canonique*, notée  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

2. Soit  $V = \mathbb{R}^n$ . Les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants et engendrent  $V = \mathbb{R}^n$ . Par conséquent, ils forment une base de  $\mathbb{R}^n$ , appelée *base canonique*, notée  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}.$$

3. Soit  $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

En vertu du théorème de caractérisation des matrices inversibles, nous avons :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \iff A \text{ est inversible.}$$

4. Soit  $V = \mathbb{P}_2$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Nous avons vu que les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x \quad \text{et} \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. De plus, comme tout élément de  $\mathbb{P}_2$  s'écrit

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a p_1(x) + b p_2(x) + c p_3(x), \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R},$$

les polynômes  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  forment une base de  $\mathbb{P}_2$ , appelée *base canonique*.

*Remarque :* Nous allons noter cette base  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  plutôt que  $\mathcal{E} = \{p_1, p_2, p_3\}$ .

5. Soit  $V = \mathbb{P}_n$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Comme les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \dots, \quad p_n(x) = x^{n-1}, \quad p_{n+1}(x) = x^n, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants et tout polynôme s'écrit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

l'ensemble  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  est une base de  $\mathbb{P}_n$ , appelée *base canonique*.

6. Soit  $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $2 \times 2$ . Comme les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes et toute matrice de taille  $2 \times 2$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de  $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ , appelée *base canonique*.

**Théorème (de la base extraite).** Soit  $V$  un espace vectoriel.

Soit  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  un ensemble de vecteurs de  $V$  et soit  $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par  $\mathcal{S}$ .

- a) Si l'un des vecteurs de  $\mathcal{S}$  est une combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$  alors ces derniers engendrent encore  $W$ .
- b) Si  $W \neq \{\vec{0}\}$ , alors il existe un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  qui est une base de  $W$ . Autrement dit, il est possible d'extraire de l'ensemble  $\mathcal{S}$  une base de  $W$ .

*Preuve.*

- a) Supposons que  $\vec{v}_k$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}$  (si ce n'est pas le cas, il suffit de rénuméroter les vecteurs) :

$$\vec{v}_k = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1}$$

Soit maintenant  $\vec{w}$  un vecteur quelconque de  $W$ . Comme  $\mathcal{S}$  engendre  $W$  nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \beta_k \vec{v}_k \\ &= \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) \vec{v}_1 + (\beta_2 + \beta_k \alpha_2) \vec{v}_2 + \dots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) \vec{v}_{k-1} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}\}$  engendre encore  $W$ .

- b) Si  $\mathcal{S}$  est linéairement indépendant, alors  $\mathcal{S}$  est une base. Sinon l'un des vecteurs de  $\mathcal{S}$  est une combinaison linéaire des autres et par a), on peut l'enlever. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'ensemble de vecteurs restant soit linéairement indépendant. ■

**Théorème 1.** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$ .

Si  $m > n$ , alors tout ensemble de vecteurs de  $V$  formé de  $m$  vecteurs est forcément linéairement dépendant.

*Preuve.* Soit  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ , avec  $m > n$ , un ensemble de vecteurs de  $V$ . Il faut montrer que

$$\alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \dots + \alpha_m \vec{w}_m = \vec{0} \quad (\star)$$

possède une solution non triviale  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .

Comme  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  est une base de  $V$ , tout vecteur de  $V$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ . En particulier

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11} \vec{b}_1 + a_{12} \vec{b}_2 + a_{13} \vec{b}_3 + \dots + a_{1n} \vec{b}_n \\ \vec{w}_2 = a_{21} \vec{b}_1 + a_{22} \vec{b}_2 + a_{23} \vec{b}_3 + \dots + a_{2n} \vec{b}_n \\ \vdots \\ \vec{w}_m = a_{m1} \vec{b}_1 + a_{m2} \vec{b}_2 + a_{m3} \vec{b}_3 + \dots + a_{mn} \vec{b}_n \end{cases}$$

En remplaçant dans  $(\star)$  nous trouvons :

$$\alpha_1 (a_{11} \vec{b}_1 + a_{12} \vec{b}_2 + \dots + a_{1n} \vec{b}_n) + \dots + \alpha_m (a_{m1} \vec{b}_1 + a_{m2} \vec{b}_2 + \dots + a_{mn} \vec{b}_n) = \vec{0}$$

ou de manière équivalente

$$(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1}) \vec{b}_1 + \dots + (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn}) \vec{b}_n = \vec{0}.$$

Comme  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  est une base de  $V$ , les vecteurs  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  sont linéairement indépendants et par conséquent, tous les coefficients de cette équation sont nuls :

$$\underbrace{(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1})}_{=0} \vec{b}_1 + \dots + \underbrace{(\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn})}_{=0} \vec{b}_n = \vec{0}.$$

Nous trouvons ainsi un système de  $n$  équations homogènes à  $m$  inconnues  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  :

$$\begin{cases} a_{11} \alpha_1 + a_{21} \alpha_2 + \dots + a_{m1} \alpha_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n} \alpha_1 + a_{2n} \alpha_2 + \dots + a_{mn} \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse  $m > n$ , le système possède des solutions non triviales, ce qui entraîne la dépendance linéaire des vecteurs  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m$ . ■

**Corollaire.** Soit  $V$  un espace vectoriel.

Toutes les bases de  $V$  contiennent le même nombre de vecteurs.

*Preuve.* Soient  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  et  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  deux bases de  $V$ .

Comme  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  est une base et par définition les vecteurs  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$  sont linéairement indépendants, le Théorème 1 nous donne  $m \leq n$ .

En échangeant les rôles de  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  et  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  nous obtenons  $n \leq m$ .

Par conséquent,  $m = n$ . ■

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel.

La *dimension* de  $V$  est le nombre de vecteurs d'une base de  $V$ . Elle est notée  $\dim(V)$ .

**Remarque.** Comme  $\{\vec{0}\}$  est un ensemble linéairement dépendant, l'espace vectoriel  $\{\vec{0}\}$  ne peut pas avoir de base et nous posons

$$\dim(\{\vec{0}\}) = 0.$$

### Exemples

1.  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  car  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2.  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$  car  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

3.  $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$  car  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ .

4.  $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$  car  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  est une base de  $\mathbb{P}_n$ .

5.  $\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$  car

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

6.  $\dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$ .

**Théorème 2.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

a) Tout ensemble de  $n$  vecteurs linéairement indépendants engendre  $V$ .

b) Tout système de générateurs de  $V$  formé de  $n$  vecteurs est linéairement indépendant.

**Conséquence.** Si la dimension  $n > 0$  de l'espace vectoriel  $V$  est connue, pour obtenir une base de  $V$  il suffit de trouver :

- soit  $n$  vecteurs linéairement indépendants de  $V$ ,
- soit un système de générateurs de  $V$  formé de  $n$  vecteurs.

### Application :

Montrer que  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (-2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , il suffit de montrer que les trois vecteurs  $(1, 2, 3)$ ,  $(-2, 1, 0)$  et  $(1, 0, 0)$  sont linéairement indépendants :

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs donnés forment bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

- a) Si  $m < n$ , alors un ensemble formé de  $m$  vecteurs de  $V$  n'engendre pas  $V$ .
- b) Si  $m < n$ , alors un ensemble formé de  $m$  vecteurs linéairement indépendants de  $V$  peut être complété pour former une base de  $V$ .

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Nous avons :

- a)  $\dim W \leq \dim V$ .
- b) Si  $\dim W = \dim V$  alors  $W = V$ .

*Preuve.*

Soit  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$ .

- a) Comme par définition les vecteurs  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$  sont linéairement indépendants, alors le Théorème 1 implique  $m \leq \dim V$ .
- b) Si  $m = \dim V$ , alors par le Théorème 2a) les  $m$  vecteurs  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$  engendrent  $V$  et forment une base de  $V$ . Ainsi  $W = V$ . ■

### Vecteur de coordonnées par rapport à une base

**Théorème 3.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$ . Alors tout vecteur  $\vec{v}$  de  $V$  s'écrit de *manière unique* comme combinaison linéaire de  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n, \quad \text{avec } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

*Preuve.* Soient  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$  et  $\vec{v} = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_n \vec{b}_n$  deux écritures de  $\vec{v}$ . Nous avons

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \vec{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{b}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{b}_n.$$

Comme les vecteurs  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  sont linéairement indépendants, nous trouvons

$$\alpha_j - \beta_j = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n \iff \alpha_j = \beta_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare$$

**Définition.** Les nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  sont appelés *coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$* .

**Remarque.** Il suit du Théorème 3 que pour tout choix d'une base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , nous pouvons associer le vecteur  $\vec{v} \in V$  au vecteur  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , appelé *vecteur des coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$* , noté  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \in V \iff [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

**Attention :** L'ordre des vecteurs de la base est important.

## Exemples

1. Trouver les coordonnées de  $\vec{v} = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$  par rapport à :

a) la base canonique  $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

b) la base  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$  :

Nous cherchons  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix}.$$

Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit  $V = \mathbb{P}_2$  et  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  la base canonique de  $V = \mathbb{P}_2$ . Nous avons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

En prenant la base  $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$  nous trouvons :

$$p(x) = 2 - 3x + 7x^2 \in \mathbb{P}_2 \iff [p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

3. Soit  $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{E}$  la base canonique de  $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ . Nous avons :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \iff [A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

### 4.3. Le rang d'une matrice

**Définition.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{\ell}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \vec{\ell}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \vec{\ell}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

sont les *vecteurs ligne* de la matrice  $A$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les  $m$  vecteurs ligne de la matrice  $A$  est appelé *sous-espace des lignes de  $A$* , noté  $\text{Lgn}(A)$  :

$$\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

La dimension du sous-espace des lignes de  $A$  est appelée *rang de la matrice  $A$* , noté  $\text{rang}(A)$  :

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Lgn}(A)).$$

**Remarque.** Comme  $\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\}$ , nous avons  $\text{rang}(A) \leq m$ .

Comme  $\text{Lgn}(A) \subset \mathbb{R}^n$ , nous avons  $\text{rang}(A) \leq n$ . Par conséquent, nous avons

$$\text{rang}(A) \leq \min(m, n).$$

#### Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ . Nous avons  $\vec{\ell}_1 = (1, 2, 3)$  et  $\vec{\ell}_2 = (4, 5, 6)$ . De plus,

$$\text{rang}(A) = 2$$

car les vecteurs  $\vec{\ell}_1$  et  $\vec{\ell}_2$  sont linéairement indépendants.

**Proposition.** Si  $A$  et  $C$  sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(C).$$

*Preuve.* Comme  $A \sim C$ , les lignes de la matrice  $C$  peuvent être obtenues à partir de celles de la matrice  $A$  à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Par conséquent, les lignes de  $C$  sont des combinaisons linéaires des lignes de  $A$  et de ce fait, elles se trouvent dans le sous-espace des lignes de  $A$ , ce qui implique

$$\text{Lgn}(C) \subset \text{Lgn}(A).$$

En inversant le rôle de  $A$  et  $C$  nous trouvons

$$\text{Lgn}(A) \subset \text{Lgn}(C),$$

ce qui nous donne l'égalité cherchée. ■

**Conséquence :** Si  $A$  et  $C$  sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(C).$$

**Remarque.** Si  $R$  est une matrice échelonnée-réduite avec  $r$  lignes non-nulles :

$$R = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} r \text{ lignes non-nulles}$$

alors les  $r$  lignes non-nulles sont automatiquement linéairement indépendantes et de ce fait, forment une base du sous-espace des lignes de  $R$ . Il s'en suit que

$$\text{rang}(R) = r.$$

**Conséquence.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $R$  la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice  $A$ . Nous avons

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(R)$$

et il est pratique d'utiliser l'ensemble formé des  $r$  lignes non-nulles de  $R$  comme base de  $\text{Lgn}(A)$ .

De plus, pour calculer le rang d'une matrice quelconque  $A$ , il suffit de compter le nombre de lignes non-nulles de  $R$  (ou le nombre de lignes non-nulles de toute matrice échelonnée associée à  $A$ ).

### Exemple

Comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_2}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R,$$

nous trouvons

$$\text{rang}(A) = 2$$

et nous pouvons prendre  $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$  (ou  $\{(1, 0, -3), (0, 2, 4)\}$ ) comme base de  $\text{Lgn}(A)$ .

Nous pouvons aussi choisir deux lignes de  $A$  linéairement indépendantes :

$$\{(1, 2, 1), (-1, 0, 3)\}, \{(1, 2, 1), (1, 4, 5)\}, \{(1, 2, 1), (1, 6, 9)\}, \{(-1, 0, 3), (1, 4, 5)\}, \text{ etc.}$$

Comme tout vecteur de  $\text{Lgn}(A)$  peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\beta - 3\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à  $\text{Lgn}(A)$  :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \text{Lgn}(A) \iff v_3 = 2v_2 - 3v_1$$

### Exemple

Soit  $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  où  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Calculer  $\dim W$  et donner une base de  $W$ .

Soit  $A$  la matrice dont les *lignes* sont les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Nous avons donc

$$W = \text{Lgn}(A) \quad \text{et} \quad \dim W = \text{rang}(A).$$

L'échelonnement et la réduction de la matrice  $A$  nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Comme  $\text{rang}(A) = 2$  nous trouvons ainsi

$$\dim W = 2.$$

Nous avons donc plusieurs choix de base de  $W$  :

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}, \quad \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \quad \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Comme tout vecteur de  $W = \text{Lgn}(A)$  peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à  $W$  :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad w_3 = w_1 + w_2$$

Ainsi, nous vérifions immédiatement que

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \\ 4051 \end{bmatrix} \in W \quad (\text{car } 2025 + 2026 = 4051).$$
$$\begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix} \notin W \quad (\text{car } 123 + 456 = 579 \neq 789).$$

**Remarque.** Le calcul est plus long en utilisant les bases  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$  et  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

## Sous-espace des colonnes d'une matrice

**Définition.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont les *vecteurs colonne* de la matrice  $A$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  engendré par les  $n$  vecteurs colonne de la matrice  $A$  est appelé *sous-espace des colonnes de  $A$* , noté  $\text{Col}(A)$  :

$$\text{Col}(A) = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

### Exemple

Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ , alors nous avons  $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

Comme par définition

$$\begin{aligned} \vec{b} \in \text{Col}(A) &\iff \vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n, \quad \text{avec } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{b} = A\vec{x}, \quad \text{avec } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \text{l'équation matricielle } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante} \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons

$$\text{Col}(A) = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m : \vec{b} = A\vec{x} \text{ pour un certain } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

### Proposition. (sans démonstration)

La dimension du sous-espace des colonnes de  $A$  est égale à  $\text{rang}(A)$  :

$$\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A).$$

**Corollaire.** Soit  $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  la matrice transposée de  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Nous avons

$$\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A).$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que le sous-espace des lignes de la matrice transposée  $A^T$  est le sous-espace des colonnes de  $A$  :  $\text{Lgn}(A^T) = \text{Col}(A)$ . ■

## Exemple

Nous avons vu que

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3] = R.$$

Ainsi,  $\dim \text{Col}(A) = \text{rang}(A) = 2$  et nous pouvons prendre

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

comme base de  $\text{Col}(A)$ . Par contre, nous ne pouvons pas prendre ici  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$  comme base de  $\text{Col}(A)$  car la troisième et la quatrième composante des vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont nulles. Nous remarquons néanmoins que les colonnes des matrices  $A$  et  $R$  ont la même relation de dépendance linéaire :

$$\vec{r}_3 = -3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}_3 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2.$$

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $R$  sa forme échelonnée-réduite.

Comme  $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$ , nous avons

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) \leq m.$$

Nous distinguons deux cas :

- Si  $\text{rang}(A) = m$ , alors  $R$  a un pivot par ligne et dans ce cas,

$$\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$$

et nous pouvons prendre n'importe quelle base de  $\mathbb{R}^m$  pour avoir une base de  $\text{Col}(A)$ .

En particulier, nous pouvons prendre la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

- Si  $\text{rang}(A) = k < m$ , alors  $R$  a seulement  $k$  pivots et contient  $m - k$  lignes nulles.

Dans ce cas, nous avons  $\text{Col}(A) \neq \text{Col}(R)$  en général (sauf si la matrice  $A$  possède les mêmes  $m - k$  lignes nulles que  $R$ ).

Comme  $\dim(\text{Col}(A)) = k$ , il suffit de choisir  $k$  colonnes linéairement indépendantes de  $A$  pour avoir une base de  $\text{Col}(A)$ . Par exemple, nous pouvons choisir les  $k$  colonnes de  $A$  correspondants aux  $k$  pivots de  $R$ . En effet, nous pouvons montrer que les colonnes de  $A$  et de  $R$  ont les mêmes relations de dépendance linéaire.

Considérons à nouveau le système d'équations linéaires à  $m$  équations et  $n$  inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases} \quad (*)$$

Nous avons vu que nous pouvons exprimer ce système sous forme matricielle :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ .

De plus, nous avons défini la matrice augmentée associée au système (\*) :

$$[A | \vec{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Les résultats obtenus au chapitre 1 peuvent se reformuler de la manière suivante :

### Théorème.

1. Si  $\text{rang}(A) < \text{rang}([A | \vec{b}])$  alors le système n'a pas de solution.
2. Si  $\text{rang}(A) = \text{rang}([A | \vec{b}]) = n$  alors le système possède une solution unique.
3. Si  $\text{rang}(A) = \text{rang}([A | \vec{b}]) < n$  alors le système possède une infinité de solutions.

*Preuve.* Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang ni les solutions du système. Par conséquent, il suffit de considérer la matrice échelonnée-réduite associée au système :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right]$$

pour conclure. ■

**Théorème du rang.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Nous avons

$$\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

*Preuve.* Nous avons

$$(\text{nombre de variables libres}) + (\text{nombre de pivots}) = (\text{nombre d'inconnues}) \quad \blacksquare$$

## Applications linéaires.

Définition. Soient  $V, W$  deux espaces vectoriels.

Soit  $T: V \rightarrow W$  une transformation. On dit que  $T$  est une application linéaire (ou transformation linéaire) si

1.  $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$  pour tout  $\vec{u}, \vec{v} \in V$

l'image de la somme de deux vecteurs  
est la somme des images des deux vecteurs

2.  $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$  pour tout  $\vec{u} \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

l'image du multiple d'un vecteur  
est le multiple de l'image du vecteur

## Exemples.

1.  $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$  est linéaire (dérivée)  
 $p \mapsto p'$

En effet,  $T(p+q) = (p+q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$

$$T(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda T(p)$$

2.  $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire.  
 $p \mapsto \int_0^1 p(x) dx$

En effet,  $T(p+q) = \int_0^1 (p+q)(x) dx = \int_0^1 (p(x) + q(x)) dx$   
 $= \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = T(p) + T(q)$

$$T(\lambda p) = \int_0^1 (\lambda p)(x) dx = \int_0^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx$$
$$= \lambda T(p)$$

### Proposition.

Si  $T: V \rightarrow W$  est une application linéaire alors  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .

### Preuve.

Nous avons:  $T(\vec{0}_V) = T(0 \vec{u}) \stackrel{2.}{=} 0 T(\vec{u}) = \vec{0}_W$  ■

### Remarque.

La contra-réciproque de cette affirmation s'écrit:

"Si  $T(\vec{0}_V) \neq \vec{0}_W$  alors  $T: V \rightarrow W$  n'est pas une application linéaire"

et donne un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire.

Attention: Si  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ , alors  $T$  n'est pas forcément linéaire.

### Conséquences de la définition.

Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors:

a.  $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$  pour tout  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  et  $c, d \in \mathbb{R}$

b. Principe de superposition:

$$T(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k) = c_1T(\vec{u}_1) + c_2T(\vec{u}_2) + \dots + c_kT(\vec{u}_k)$$

pour tout  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in V$  et  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ .

### Preuve.

a.  $T(c\vec{u} + d\vec{v}) \stackrel{1.}{=} T(c\vec{u}) + T(d\vec{v}) \stackrel{2.}{=} cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

b. Il suffit d'écrire  $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = c_1\vec{u}_1 + (c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k)$

et utiliser la partie a (plusieurs fois). ■

## Matrice associée à une application linéaire $T: V \rightarrow W$

### Rappel.

Si  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire, alors on peut lui associer la matrice de taille  $m \times n$  dont les colonnes sont les images des  $n$  vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  :

$$A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \dots \quad T(\vec{e}_n)]$$

appelée matrice canoniquement associée à  $T$ .

Nous allons voir maintenant comment associer une matrice à une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  où  $V, W$  sont des espaces vectoriels quelconques.

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$

Nous avons vu que tout vecteur  $\vec{v} \in V$  s'écrit de manière unique :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

et nous avons noté

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur de coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Proposition. L'application  $\mathcal{Q}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est linéaire et bijective.

$$\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Preuve. A voir:  $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\varphi}(\vec{u}) + \vec{\varphi}(\vec{v})$  pour tout  $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$\varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}) \text{ pour tout } \vec{u} \in V \text{ et } \lambda \in \mathcal{R}$$

Supposons que  $\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \\ \vec{v} = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_n \vec{b}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{b}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{b}_n$

$$\text{d'où } \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \vec{\varphi}(\vec{u}) + \vec{\varphi}(\vec{v}) \text{ pour tout } \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

$$\text{Comme } \lambda \vec{u} = \lambda(\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n) = (\lambda \alpha_1) \vec{b}_1 + \dots + (\lambda \alpha_n) \vec{b}_n$$

$$\text{on a } \varphi(\lambda \vec{u}) = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \lambda \varphi(\vec{u}) \text{ pour tout } \vec{u} \in V \text{ et } \lambda \in \mathcal{R}$$

L'application est bijective car l'écriture  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$  est unique. ■

Soit  $W$  un espace vectoriel de dimension  $m > 0$ .

Soit  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$ .

De même, l'application  $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire et bijective.  
 $\vec{w} \mapsto [\vec{w}]_{\mathcal{B}'}$

Considérons maintenant une application linéaire  $T: V \rightarrow W$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } T(\vec{v}) &= T(\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n) \\ &= T(\alpha_1 \vec{b}_1) + \dots + T(\alpha_n \vec{b}_n) \quad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{b}_1) + \dots + \alpha_n T(\vec{b}_n)} \quad \text{par linéarité}$$

Cette expression nous dit qu'il suffit de connaître les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  pour connaître l'image de  $\vec{v}$  par  $T$ , pour tout  $\vec{v} \in V$ .

Nous avons le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{v} \in V & \xrightarrow{T} & W \ni T(\vec{v}) \\
 \downarrow & & \downarrow \psi \\
 [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \ni [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

Soit  $A$  la matrice de taille  $m \times n$  telle que

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = A[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Nous avons vu que les colonnes de  $A$  sont les images des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme par construction  $\vec{b}_1 = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n$  on a  $[\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1$ .

De même,  $[\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_2, \dots, [\vec{b}_n]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_n$ , d'où :

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{b}_j & \xrightarrow{T} & T(\vec{b}_j) \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
 \vec{e}_j & \dashrightarrow & [T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

L'image de  $\vec{e}_j$  est donc  $[T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}'}$  pour  $j=1, \dots, n$ , d'où :

### Définition.

Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$  et  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$ .

La matrice de taille  $m \times n$  dont la  $j$ -ème colonne est le vecteur de coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de l'image par  $T$  du  $j$ -ème vecteur de la base  $\mathcal{B}$  est appelée matrice associée à l'application linéaire  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ , notée  $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  :

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left[ [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}'} \quad \dots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$$

Nous avons ainsi:  $[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{v} \in V$ .

### Méthode pour calculer $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ .

- Calculer les images des  $n$  vecteurs de la base  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  de  $V$ :

$$T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \dots, T(\vec{b}_n)$$

- Exprimer ces  $n$  vecteurs comme combinaisons linéaires des  $m$

vecteurs de la base  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  :

$$T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \dots + a_{m1}\vec{w}_m$$

$\vdots$

$$T(\vec{b}_n) = a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \dots + a_{mn}\vec{w}_m$$

La matrice  $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  a comme colonnes les vecteurs de coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  des vecteurs  $T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \dots, T(\vec{b}_n)$ :

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left[ \begin{array}{c} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}'} \\ \vdots \\ [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

### Remarques.

- Si l'on prend les bases canoniques  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  de  $V$  et  $W$ , on va noter  $A_T$  la matrice associée plutôt que  $A_T^{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$  (pour simplifier la notation).
- Si les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont égaux:  $V = W$ , en général on va prendre la même base pour les deux espaces:  $\mathcal{B} = \mathcal{B}$  et on va noter  $A_T^{\mathcal{B}}$  la matrice associée plutôt que  $A_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$  (pour simplifier la notation).

## Exemples.

1. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $T(x, y, z) = (x+y, x-z)$  par rapport aux bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

définie par  $T(x, y, z) = (2x+3y-4z, 5x-6y, 7x-8z)$  par rapport aux bases  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (espace de départ) et  $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $T(x, y, z) = (2x + 3y - 4z, 5x - 6y, 7x - 8z)$  par rapport à la base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $T(x, y, z) = (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z)$  par rapport à la base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $T(x, y, z) = (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z)$  par rapport à la base  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 2)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que pour ce choix particulier de base, la matrice  $A_T^{\mathcal{B}}$  est une matrice diagonale.

6. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définie par  $T(p) = p'$  (dérivée) par rapport à la base canonique  $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathbb{P}_2$ . On a:

$$\left. \begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ [T(1)]_{\mathcal{E}} & [T(x)]_{\mathcal{E}} & [T(x^2)]_{\mathcal{E}} \end{matrix}$

Remarque. Si  $p(x) = a + bx + cx^2$  est un polynôme quelconque, les règles de dérivation nous donnent tout de suite :

$p'(x) = b + 2cx$ . Nous avons donc :

$$\boxed{T(a+bx+cx^2) = b+2cx}$$

La matrice  $A_T$  nous permet de retrouver le même résultat à l'aide d'une multiplication matricielle. En effet,

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow A_T [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{bmatrix} = [p']_{\mathcal{E}}$$

d'où :

$$\boxed{[p']_{\mathcal{E}} = A_T [p]_{\mathcal{E}}}$$

7. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définie par  $\boxed{T(p) = p'}$  par rapport à la base  $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$  de  $\mathbb{P}_2$ . On a :

$$\left. \begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x) &= (1+x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x+x^2) &= (1+x+x^2)' = 1+2x = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

8. Soit  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $2 \times 2$ .

Déterminer la matrice de l'application linéaire  $\text{Tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

définie par  $\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$  (trace de la matrice),

par rapport aux bases canoniques de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$ . On a:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = 1 = 1 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{Tr}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Noyau et image d'une application linéaire.

#### Définition.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

a) Le **noyau** de  $T$ , noté  $\text{Ker}(T)$  est le sous-ensemble de  $V$  défini par

$$\text{Ker}(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W \} \subset V$$

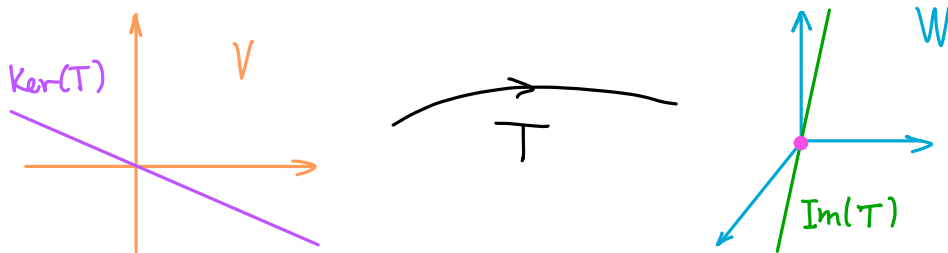
b) L'**image** de  $T$ , notée  $\text{Im}(T)$  est le sous-ensemble de  $W$  défini par

$$\text{Im}(T) = \{ \vec{w} \in W : \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w} \} \subset W$$

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{T} W \\ \text{Ker}(T) &\longrightarrow \{\vec{0}_W\} \\ V &\longrightarrow \text{Im}(T) \end{aligned}$$

Illustration:



Théorème  $\text{Ker}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

Preuve.

On commence par remarquer que  $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$  car  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}$

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir :  $\vec{u} + \vec{v}, \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$

Par hypothèse,  $T(\vec{u}) = \vec{0}$  et  $T(\vec{v}) = \vec{0}$

On a  $T(\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(T)$

$T(\lambda \vec{u}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \lambda T(\vec{u}) = \lambda \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$  ■

Théorème.  $\text{Im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

Preuve.

On commence par remarquer que  $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$  car  $\vec{0}_V \in V$  est tel que  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .

Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir :  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2, \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T)$

Par hypothèse, il existe  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  tels que  $\vec{w}_1 = T(\vec{v}_1)$  et  $\vec{w}_2 = T(\vec{v}_2)$

On a  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$

$$\lambda \vec{w}_1 = \lambda T(\vec{v}_1) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\lambda \vec{v}_1) \Rightarrow \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T) \quad \blacksquare$$

Remarques.

1. Nous avons  $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$  et  $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$

2. Pour caractériser  $\text{Ker}(T)$  et  $\text{Im}(T)$  complètement, il suffit de donner leur dimension et une base.

De plus,  $\dim(\text{Ker}(T)) \leq \dim(V)$

et  $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$

## Exemples.

1. Application nulle:

Soit  $T: V \rightarrow W$  définie par  $T(\vec{v}) = \vec{0}$  pour tout  $\vec{v} \in V$

On a  $\text{Ker}(T) = V$  et  $\text{Im}(T) = \{\vec{0}\}$

2. Application identité:

Soit  $T: V \rightarrow V$  définie par  $T(\vec{v}) = \vec{v}$  pour tout  $\vec{v} \in V$

On a  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$  et  $\text{Im}(T) = V$

3. Soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  pour tout  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

On a  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

et  $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \text{Ker}(T) = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  ( $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ )

## Noyau et image d'une application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ associée à une matrice.

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'application linéaire associée,

Par définition,  $\vec{v} \in \text{Ker}(T_A) \Leftrightarrow T_A(\vec{v}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Nul}(A) \quad \left( \begin{array}{l} \text{sous-espace vectoriel} \\ \text{des solutions du} \\ \text{système homogène } A\vec{v} = \vec{0} \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Nul}(A)}$$

Nous avons vu que  $\dim(\text{Nul}(A)) = n - \text{rang}(A)$

$$\left( \begin{array}{l} = \text{nb. d'inconnues} - \text{nb. de pivots} \\ = \text{nb. de variables libres} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) = n - \text{rang}(A)}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'autre part, } \vec{w} \in \text{Im}(T_A) &\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T_A(\vec{v}) = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\vec{v} = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } v_1 \vec{a}_1 + \dots + v_n \vec{a}_n = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \vec{w} \in \text{Col}(A)
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A)}$

Nous avons vu que  $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A)$ .

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Im}(T_A)) = \text{rang}(A)}$$

Conséquence.

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_A)) = n}$$

Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{\text{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \rightarrow L_3 + L_2}]{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 3 - 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 1 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases}}$$

Systeme homogène associé à R :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \left( \begin{array}{l} 2 \text{ variables principales} \\ 1 \text{ variable libre} \end{array} \right)$$

solution générale :  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}} \text{ ou } \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Comme  $\dim(\text{Im}(T_A))=2$ , il faut choisir deux colonnes de  $A$  linéairement indépendantes pour avoir une base de  $\text{Im}(T_A)=\text{Col}(A)$ . Par exemple,

$$\boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}} \quad \boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}} \quad \boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}}$$

Remarque 1. Nous pouvons remplacer  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  par  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  ci-dessus.

Remarque 2. Nous avons ici

$$\text{Col}(R) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Col}(A) \neq \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Remarque 3. Si l'on prend les colonnes de  $A$  associées aux pivots de  $R$ , nous avons des vecteurs linéairement indépendants et donc un choix de base.

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R \quad (\text{série 8, exercice 3})$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}$

$$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 5 - 3 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases}}$$

Comme  $\dim(\text{Im}(T_A))=3$  et  $\text{Im}(T_A) \subset \mathbb{R}^3$  on a  $\boxed{\text{Im}(T_A) = \mathbb{R}^3}$

Système homogène associé à  $R$  :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

solution générale :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Noyau et image d'une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  quelconque.

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$  ( $\dim V = n$ )

Soit  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$  ( $\dim W = m$ )

Soit  $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  la matrice de  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

Nous avons l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} T(\vec{v}) = \vec{w} \\ \text{avec } \vec{v} \in V \text{ et } \vec{w} \in W \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \overset{\text{produit matriciel}}{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'}, \\ \text{avec } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ et } [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow T(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{0}]_{\mathcal{B}'},$$

$$\Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'},$$

$$\Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

En résumé,

$$\vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

Conséquence.

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Nul}(A))$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Col}(A))$$

Définition. Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

On définit le rang de  $T$ , noté  $\text{rang}(T)$  par

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

Remarque. On peut montrer que

$$\text{rang}(T) = \text{rang}(A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^T)$$

pour tout choix de base  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

Théorème. (Théorème du rang)

Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire. On a :

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ &= \dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang}(T) \end{aligned}$$

### Preuve.

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $W$ .

Soit  $A = A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^T$  la matrice de  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

Soit  $A\vec{x} = \vec{0}$  le système homogène associé.

Nous avons vu que :

$$(\text{nb. de variables libres}) = (\text{nb. d'inconnues}) - (\text{nb. de pivots})$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - \dim(\text{Col}(A))$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim V - \dim(\text{Im}(T))$$

d'où le résultat. ■

### Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définie par  $T(p) = p'$  (dérivée)

Par définition,  $\text{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{P}_2 : T(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{P}_2 : p' = 0\}$

On s'attend à trouver  $\text{Ker}(T) = \mathbb{P}_0$ .

D'autre part,  $\text{Im}(T) = \{q \in \mathbb{P}_2 : \text{il existe } p \in \mathbb{P}_2 \text{ tel que } p' = q\}$

On s'attend à trouver  $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_1$ .

Rappel. La matrice de  $T(p) = p'$  par rapport à la base canonique

$\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathbb{P}_2$  est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(T)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$ , nous trouvons

$$\text{Ker}(T) = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{P}_0$$

$$\text{D'autre part, on a } \text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ ou } \text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$  et  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]_{\mathcal{E}}$ , nous trouvons

$$\text{Im}(T) = \text{Vect}\{1, x\} = \mathbb{P}_1$$

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire trace

$$\text{Tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \boxed{\text{Tr} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d}$$

Rappel. La matrice de Tr par rapport aux bases canoniques de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$  est

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$x_1 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

solution générale: 
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Ainsi,  $\text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

On a  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$  car  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De même on trouve  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$  et  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(\text{Tr}) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

D'autre part, comme  $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ , on a  $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$

### Changement de base.

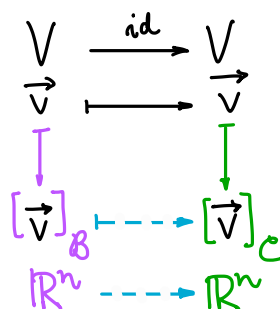
Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 0$ .

Soient  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  et  $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$

deux bases de  $V$ .

Soit  $\text{id}: V \rightarrow V$  l'application identité  $\text{id}(\vec{v}) = \vec{v}$  pour tout  $\vec{v} \in V$

Nous avons le schéma suivant:



L'application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui envoie  $[\vec{v}]_B$  vers  $[\vec{v}]_C$  est la multiplication par la matrice  $A_{id}^{CB}$ . On note cette matrice  $P^{CB}$  et on l'appelle matrice de passage de la base  $B$  vers la base  $C$ .

Par construction,

$$P^{CB} = A_{id}^{CB} = \left[ [\vec{b}_1]_C \quad [\vec{b}_2]_C \quad \dots \quad [\vec{b}_n]_C \right]$$

et

$$[\vec{v}]_C = P^{CB} [\vec{v}]_B$$

Exemple.

Soyent  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  et  $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P^{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P^{BC} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

### Propriété importante.

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases de l'espace vectoriel  $V$  alors :

$$P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

### Conséquence.

Nous pouvons obtenir  $P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  à l'aide de l'algorithme :

$$[P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} | I_n] \sim [I_n | P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}]$$

Reprenons les bases de l'exemple précédent. On a :

$$\begin{aligned} [P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} | I_2] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [I_2 | P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}] \end{aligned}$$

### Remarque.

Lorsque  $V = \mathbb{R}^n$ , on a  $\vec{b}_1 = \beta_1 \vec{c}_1 + \dots + \beta_n \vec{c}_n = [\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n] [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}}$

et on peut obtenir  $[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}}$  en réduisant la matrice augmentée

$$[\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_n | \vec{b}_1] \sim [I_n | [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}}]$$

Par conséquent, une manière alternative pour obtenir  $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

dans le cas  $V = \mathbb{R}^n$  consiste à réduire la matrice :

$$[\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_n | \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \sim [I_n | P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}]$$

On remarque que si la base d'arrivée est la base

canonique  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  on a tout de suite :

$$P^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n]$$

## Propriétés.

Si  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont trois bases de l'espace vectoriel  $V$  alors la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{D}$  peut se calculer comme suit:

$$\boxed{P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}} \quad \begin{array}{l} \text{(multiplication)} \\ \text{(matricielle)} \end{array}$$

$$\text{ou } P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{C}\mathcal{D}})^{-1} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

$$\text{ou } P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}$$

Les formules précédentes nous donnent une manière alternative pour calculer  $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ :  $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{E}\mathcal{C}})^{-1} P^{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ , où comme avant  $\mathcal{E}$  est la base canonique de  $V$ .

## Question.

Quel est l'effet du changement de base sur les applications linéaires?

Proposition. Soit  $T: V \rightarrow V$  une application linéaire.

Soient  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  et  $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$

deux bases de  $V$ . Alors:

$$\boxed{A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$$

Formulations équivalentes:

$$A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} (P^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

$$A_T^{\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} A_T^{\mathcal{B}} P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Preuve. Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\quad} & V \\
 \vec{v} & \longmapsto & T(\vec{v}) \\
 \\ 
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 \text{base } \mathcal{B}: & [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \xrightarrow{A_T^{\mathcal{B}}} A_T^{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} & \\
 \\ 
 & \begin{array}{c} \uparrow P^{BC} \\ [\vec{v}]_{\mathcal{C}} \xrightarrow{A_T^{\mathcal{C}}} A_T^{\mathcal{C}} [\vec{v}]_{\mathcal{C}} \\ \downarrow P^{CB} \end{array} & \\
 \text{base } \mathcal{C}: & \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^n & 
 \end{array}$$

■

Remarque.

Cette proposition nous donne une manière alternative de calculer

$$A_T^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{c}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\vec{c}_2)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(\vec{c}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

lorsque  $A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$  et  $P^{CB}$  (ou  $P^{BC}$ )

sont connues.

### Définition.

Soient  $A$  et  $A'$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ .

On dit que les matrices  $A$  et  $A'$  sont *semblables* s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$A' = PAP^{-1}$$

### Exemple important.

Les matrices  $A_T^C$  et  $A_T^B$  sont semblables car on a

$$A_T^C = P A_T^B P^{-1} \quad \text{avec } P = P^{CB}$$