Changement de base.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soient $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots, \vec{c_n}\}$

deux bases de V.

Soit $id : V \to V$ l'application identité $id(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$

Nous avons le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id"] & V \\
\vec{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \vec{v} \arrow[d, mapsto] \\
{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, dashed] & {[\vec{v}]_{\mathcal{C}}} \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

L'application linéaire $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ vers $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$ est la multiplication par la matrice $A_{id}^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. On note cette matrice $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ et on l'appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

Par construction,

$$\boxed{P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = A_{id}^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \ [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} \cdots [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \right]}$$

et

$$\boxed{[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}}$$

Exemple.

Soient $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriété importante.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de l'espace vectoriel V alors :

$$\boxed{P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \left(P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right)^{-1}}$$

Conséquence.

Nous pouvons obtenir $P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ à l'aide de l'algorithme :

$$\boxed{\left[P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_n\right] \sim \left[I_n \mid P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}\right]}$$

Reprenons les bases de l'exemple précédent. On a :

$$\left[P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 \to -L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[I_2 \mid P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}\right]$$

Remarque.

Lorsque $V=\mathbb{R}^n$, on a $\vec{b}_1 = \beta_1\vec{c}_1 + \dots + \beta_n\vec{c}_n = [\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_n][\vec{b}_1]_C$

et on peut obtenir $[\vec{b}_1]_C$ en réduisant la matrice augmentée

$$[\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \cdots\ \vec{c}_n \mid \vec{b}_1] \sim [I_n \mid [\vec{b}_1]_C]$$

Par conséquent, une manière alternative pour obtenir $P^{C\mathcal{B}}$ dans le cas $V=\mathbb{R}^n$ consiste à réduire la matrice :

$$\boxed{[\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \cdots\ \vec{c}_n \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \cdots\ \vec{b}_n] \sim [I_n \mid P^{C\mathcal{B}}]}$$

On remarque que si la base d'arrivée est la base canonique $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ on a tout de suite :

$$\boxed{P^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \cdots\ \vec{b}_n]}$$

Propriétés.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont trois bases de l'espace vectoriel V alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{D}$ peut se calculer comme suit :

$$\boxed{P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{multiplication} \\ \text{matricielle}\end{array}\right)$$

ou $P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{C}\mathcal{D}})^{-1} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

ou $P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}$

Les formules précédentes nous donnent une manière alternative pour calculer $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$: $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{E}\mathcal{C}})^{-1} P^{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, où comme avant $\mathcal{E}$ est la base canonique de V.

Question.

Quel est l'effet du changement de base sur les applications linéaires ?

Proposition. Soit $T : V \to V$ une application linéaire.

Soient $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$

deux bases de V. Alors :

$$\boxed{A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \, A_T^{\mathcal{B}} \, P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}}$$

Formulations équivalentes :

$$A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \, A_T^{\mathcal{B}} \, (P^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

$$A_T^{\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} \, A_T^{\mathcal{B}} \, P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Preuve. Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \vec{v} & \longmapsto & T(\vec{v}) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^n \\
\text{base } \mathcal{B} : & {[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, "A_T^{\mathcal{B}} :"] & A_T^{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} \arrow[d, mapsto, "P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} :"'] \\
 & {[\vec{v}]_{\mathcal{C}}} \arrow[u, mapsto, "P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} :"] \arrow[r, mapsto, "A_T^{\mathcal{C}} :"] & A_T^{\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{C}} \\
\text{base } \mathcal{C} : & \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

∎

Remarque.

Cette proposition nous donne une manière alternative de calculer

$$A_T^{\mathcal{C}} = \left[[T(\vec{c}_1)]_{\mathcal{C}} \ [T(\vec{c}_2)]_{\mathcal{C}} \cdots [T(\vec{c}_n)]_{\mathcal{C}} \right]$$

lorsque $A_T^{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$ et $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ (ou $P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$)

sont connues.

Définition.

Soient A et A' deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\boxed{A' = PAP^{-1}}$$

Exemple important.

Les matrices $A_T^{\mathcal{C}}$ et $A_T^{\mathcal{B}}$ sont semblables car on a

$$A_T^{\mathcal{C}} = P A_T^{\mathcal{B}} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$