

## Noyau et image d'une application linéaire.

### Définition.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

a) Le **noyau** de  $T$ , noté  $\text{Ker}(T)$  est le sous-ensemble de  $V$  défini par

$$\text{Ker}(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W \} \subset V$$

b) L'**image** de  $T$ , notée  $\text{Im}(T)$  est le sous-ensemble de  $W$  défini par

$$\text{Im}(T) = \{ \vec{w} \in W : \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w} \} \subset W$$

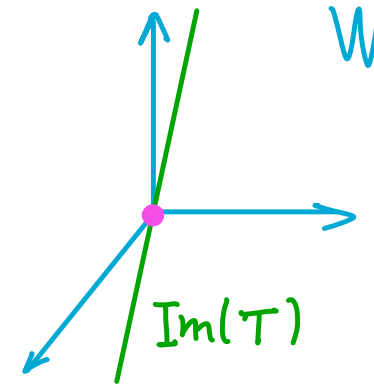
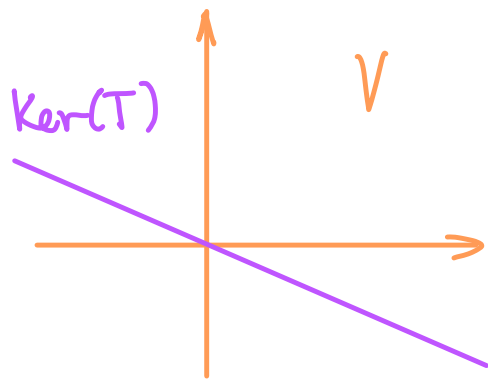
Nous avons le schéma suivant :

$$V \xrightarrow{T} W$$

$$\text{Ker}(T) \longrightarrow \{\vec{0}_W\}$$

$$V \longrightarrow \text{Im}(T)$$

Illustration:



Théorème  $\text{Ker}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

Preuve.

On commence par remarquer que  $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$  car  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}$

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir :  $\vec{u} + \vec{v}, \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$

Par hypothèse,  $T(\vec{u}) = \vec{0}$  et  $T(\vec{v}) = \vec{0}$

On a  $T(\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(T)$

$T(\lambda \vec{u}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \lambda T(\vec{u}) = \lambda \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$  ■

Théorème.  $\text{Im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

Preuve.

On commence par remarquer que  $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$  car  $\vec{0}_V \in V$  est tel que  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ .

Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir :  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2, \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T)$

Par hypothèse, il existe  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  tels que  $\vec{w}_1 = T(\vec{v}_1)$  et  $\vec{w}_2 = T(\vec{v}_2)$

On a  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$

$$\lambda \vec{w}_1 = \lambda T(\vec{v}_1) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\lambda \vec{v}_1) \Rightarrow \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T) \quad \blacksquare$$

## Remarques.

1. Nous avons  $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$  et  $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$
2. Pour caractériser  $\text{Ker}(T)$  et  $\text{Im}(T)$  complètement, il suffit de donner leur dimension et une base.

De plus,  $\dim(\text{Ker}(T)) \leq \dim(V)$

et  $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$

## Exemples.

1. Application nulle:

Soit  $T: V \rightarrow W$  définie par  $T(\vec{v}) = \vec{0}$  pour tout  $\vec{v} \in V$

On a  $\text{Ker}(T) = V$  et  $\text{Im}(T) = \{\vec{0}\}$

2. Application identité:

Soit  $T: V \rightarrow V$  définie par  $T(\vec{v}) = \vec{v}$  pour tout  $\vec{v} \in V$

On a  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$  et  $\text{Im}(T) = V$

3. Soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  pour tout  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

On a  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

et  $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \text{Ker}(T) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  ( $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ )

## Noyau et image d'une application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ associée à une matrice.

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'application linéaire associée.

$$\text{Par définition, } \vec{v} \in \text{Ker}(T_A) \Leftrightarrow T_A(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Nul}(A) \quad \left( \begin{array}{l} \text{sous-espace vectoriel} \\ \text{des solutions du} \\ \text{système homogène } A\vec{v} = \vec{0} \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Nul}(A)}$$

Nous avons vu que  $\dim(\text{Nul}(A)) = n - \text{rang}(A)$

$$\left( \begin{array}{l} = \text{nb. d'inconnues} - \text{nb. de pivots} \\ = \text{nb. de variables libres} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) = n - \text{rang}(A)}$$

D'autre part,  $\vec{w} \in \text{Im}(T_A) \Leftrightarrow$  il existe  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $T_A(\vec{v}) = \vec{w}$

$\Leftrightarrow$  il existe  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A\vec{v} = \vec{w}$

$\Leftrightarrow$  il existe  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $v_1 \vec{a}_1 + \dots + v_n \vec{a}_n = \vec{w}$

$\Leftrightarrow \vec{w} \in \text{Col}(A)$

Ainsi,  $\boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A)}$

Nous avons vu que  $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A)$ .

$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Im}(T_A)) = \text{rang}(A)}$

Conséquence.

$\boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_A)) = n}$

## Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \rightarrow L_3 + L_2}]{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 3 - 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 1 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases}}$$

Systeme homogène associé à R :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \begin{matrix} (2 \text{ variables principales}) \\ (1 \text{ variable libre}) \end{matrix}$$

solution générale :  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}} \text{ ou } \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Comme  $\dim(\text{Im}(T_A))=2$ , il faut choisir deux colonnes de A linéairement indépendantes pour avoir une base de  $\text{Im}(T_A)=\text{Col}(A)$ . Par exemple,

$$\boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}} \quad \boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}} \quad \boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}}$$

Remarque 1. Nous pouvons remplacer  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  par  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  ci-dessus.

Remarque 2. Nous avons ici

$$\text{Col}(R) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Col}(A) \neq \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Remarque 3. Si l'on prend les colonnes de A associées aux pivots de R, nous avons des vecteurs linéairement indépendants et donc un choix de base.

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R \text{ (série 8, exercice 3)}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}$

$$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 5 - 3 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases}$$

Comme  $\dim(\text{Im}(T_A)) = 3$  et  $\text{Im}(T_A) \subset \mathbb{R}^3$  on a  $\text{Im}(T_A) = \mathbb{R}^3$

Systeme homogène associé à R :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

Solution générale :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Noyau et image d'une application linéaire  $T: V \rightarrow W$  quelconque.

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  une base de  $V$  ( $\dim V = n$ )

Soit  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$  ( $\dim W = m$ )

Soit  $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  la matrice de  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

Nous avons l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} T(\vec{v}) = \vec{w} \\ \text{avec } \vec{v} \in V \text{ et } \vec{w} \in W \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \overset{\text{produit matriciel}}{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \\ \text{avec } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ et } [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow T(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{0}]_{\mathcal{B}'}$$

$$\Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'}$$

$$\Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

En résumé,

$$\vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

Conséquence.

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Nul}(A))$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Col}(A))$$

Définition. Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire.

On définit le rang de  $T$ , noté  $\text{rang}(T)$  par

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

Remarque. On peut montrer que

$$\text{rang}(T) = \text{rang}(A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}})$$

pour tout choix de base  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

## Théorème. (Théorème du rang)

Soit  $T: V \rightarrow W$  une application linéaire. On a :

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ &= \dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang}(T) \end{aligned}$$

## Preuve.

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $W$ .

Soit  $A = A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^T$  la matrice de  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  et  $\mathcal{B}'$  de  $W$ .

Soit  $A\vec{x} = \vec{0}$  le système homogène associé.

Nous avons vu que :

$$(\text{nb. de variables libres}) = (\text{nb. d'inconnues}) - (\text{nb. de pivots})$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - \dim(\text{Col}(A))$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim V - \dim(\text{Im}(T))$$

d'où le résultat. ■

## Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définie par  $T(p) = p'$  (dérivée)

Par définition,  $\text{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{P}_2 : T(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{P}_2 : p' = 0\}$

On s'attend à trouver  $\text{Ker}(T) = \mathbb{P}_0$ .

D'autre part,  $\text{Im}(T) = \{q \in \mathbb{P}_2 : \text{il existe } p \in \mathbb{P}_2 \text{ tel que } p' = q\}$

On s'attend à trouver  $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_1$ .

Rappel. La matrice de  $T(p) = p'$  par rapport à la base canonique

$\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$  de  $\mathbb{P}_2$  est

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(T)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à  $A$ :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$ , nous trouvons

$$\text{Ker}(T) = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{P}_0$$

D'autre part, on a  $\text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  ou  $\text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Comme  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$  et  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]_{\mathcal{E}}$ , nous trouvons

$$\text{Im}(T) = \text{Vect}\{1, x\} = \mathbb{P}_1$$

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire trace

$$\text{Tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \boxed{\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+d}$$

Rappel. La matrice de Tr par rapport aux bases canoniques

de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$  est

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$x_1 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

solution générale: 
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Ainsi, 
$$\text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

On a  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$  car  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De même on trouve  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$  et  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(\text{Tr}) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

D'autre part, comme  $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ , on a  $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$