

### 4.3. Le rang d'une matrice

**Définition.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{\ell}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \vec{\ell}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \vec{\ell}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

sont les *vecteurs ligne* de la matrice  $A$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les  $m$  vecteurs ligne de la matrice  $A$  est appelé *sous-espace des lignes de  $A$* , noté  $\text{Lgn}(A)$  :

$$\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

La dimension du sous-espace des lignes de  $A$  est appelée *rang de la matrice  $A$* , noté  $\text{rang}(A)$  :

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Lgn}(A)).$$

**Remarque.** Comme  $\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\}$ , nous avons  $\text{rang}(A) \leq m$ .

Comme  $\text{Lgn}(A) \subset \mathbb{R}^n$ , nous avons  $\text{rang}(A) \leq n$ . Par conséquent, nous avons

$$\text{rang}(A) \leq \min(m, n).$$

### Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ . Nous avons  $\vec{\ell}_1 = (1, 2, 3)$  et  $\vec{\ell}_2 = (4, 5, 6)$ . De plus,

$$\text{rang}(A) = 2$$

car les vecteurs  $\vec{\ell}_1$  et  $\vec{\ell}_2$  sont linéairement indépendants.

**Proposition.** Si  $A$  et  $C$  sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(C).$$

*Preuve.* Comme  $A \sim C$ , les lignes de la matrice  $C$  peuvent être obtenues à partir de celles de la matrice  $A$  à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Par conséquent, les lignes de  $C$  sont des combinaisons linéaires des lignes de  $A$  et de ce fait, elles se trouvent dans le sous-espace des lignes de  $A$ , ce qui implique

$$\text{Lgn}(C) \subset \text{Lgn}(A).$$

En inversant le rôle de  $A$  et  $C$  nous trouvons

$$\text{Lgn}(A) \subset \text{Lgn}(C),$$

ce qui nous donne l'égalité cherchée. ■

**Conséquence:** Si  $A$  et  $C$  sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(C).$$

**Remarque.** Si  $R$  est une matrice échelonnée-réduite avec  $r$  lignes non-nulles :

$$R = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} r \text{ lignes non-nulles}$$

alors les  $r$  lignes non-nulles sont automatiquement linéairement indépendantes et de ce fait, forment une base du sous-espace des lignes de  $R$ . Il s'en suit que

$$\text{rang}(R) = r.$$

**Conséquence.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $R$  la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice  $A$ . Nous avons

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(R)$$

et il est pratique d'utiliser l'ensemble formé des  $r$  lignes non-nulles de  $R$  comme base de  $\text{Lgn}(A)$ .

De plus, pour calculer le rang d'une matrice quelconque  $A$ , il suffit de compter le nombre de lignes non-nulles de  $R$  (ou le nombre de lignes non-nulles de toute matrice échelonnée associée à  $A$ ).

## Exemple

Comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R,$$

nous trouvons

$$\text{rang}(A) = 2$$

et nous pouvons prendre  $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$  (ou  $\{(1, 0, -3), (0, 2, 4)\}$ ) comme base de  $\text{Lgn}(A)$ .

Nous pouvons aussi choisir deux lignes de  $A$  linéairement indépendantes :

$$\{(1, 2, 1), (-1, 0, 3)\}, \{(1, 2, 1), (1, 4, 5)\}, \{(1, 2, 1), (1, 6, 9)\}, \{(-1, 0, 3), (1, 4, 5)\}, \text{ etc.}$$

Comme tout vecteur de  $\text{Lgn}(A)$  peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\beta - 3\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à  $\text{Lgn}(A)$  :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \text{Lgn}(A) \iff v_3 = 2v_2 - 3v_1$$

## Exemple

Soit  $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  où  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Calculer  $\dim W$  et donner une base de  $W$ .

Soit  $A$  la matrice dont les *lignes* sont les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Nous avons donc

$$W = \text{Lgn}(A) \quad \text{et} \quad \dim W = \text{rang}(A).$$

L'échelonnement et la réduction de la matrice  $A$  nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Comme  $\text{rang}(A) = 2$  nous trouvons ainsi

$$\dim W = 2.$$

Nous avons donc plusieurs choix de base de  $W$  :

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}, \quad \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \quad \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Comme tout vecteur de  $W = \text{Lgn}(A)$  peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à  $W$  :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad w_3 = w_1 + w_2$$

Ainsi, nous vérifions immédiatement que

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \\ 4051 \end{bmatrix} \in W \quad (\text{car } 2025 + 2026 = 4051).$$

$$\begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix} \notin W \quad (\text{car } 123 + 456 = 579 \neq 789).$$

**Remarque.** Le calcul est plus long en utilisant les bases  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$  et  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

## Sous-espace des colonnes d'une matrice

**Définition.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont les *vecteurs colonne* de la matrice  $A$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  engendré par les  $n$  vecteurs colonne de la matrice  $A$  est appelé *sous-espace des colonnes de  $A$* , noté  $\text{Col}(A)$  :

$$\text{Col}(A) = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

### Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \text{ alors nous avons } \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Comme par définition

$$\begin{aligned}\vec{b} \in \text{Col}(A) &\iff \vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n, \quad \text{avec } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{b} = A\vec{x}, \quad \text{avec } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \text{l'équation matricielle } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante}\end{aligned}$$

Par conséquent nous avons

$$\text{Col}(A) = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m : \vec{b} = A\vec{x} \text{ pour un certain } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

**Proposition.** (sans démonstration)

La dimension du sous-espace des colonnes de  $A$  est égale à  $\text{rang}(A)$  :

$$\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A).$$

**Corollaire.** Soit  $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  la matrice transposée de  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Nous avons

$$\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A).$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que le sous-espace des lignes de la matrice transposée  $A^T$  est le sous-espace des colonnes de  $A$  :  $\text{Lgn}(A^T) = \text{Col}(A)$ . ■

## Exemple

Nous avons vu que

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{bmatrix} = R.$$

Ainsi,  $\dim \text{Col}(A) = \text{rang}(A) = 2$  et nous pouvons prendre

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

comme base de  $\text{Col}(A)$ . Par contre, nous ne pouvons pas prendre ici  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$  comme base de  $\text{Col}(A)$  car la troisième et la quatrième composante des vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont nulles.

Nous remarquons néanmoins que les colonnes des matrices  $A$  et  $R$  ont la même relation de dépendance linéaire :

$$\vec{r}_3 = -3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}_3 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2.$$

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $R$  sa forme échelonnée-réduite.

Comme  $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$ , nous avons

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) \leq m.$$

Nous distinguons deux cas :

- Si  $\text{rang}(A) = m$ , alors  $R$  a un pivot par ligne et dans ce cas,

$$\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$$

et nous pouvons prendre n'importe quelle base de  $\mathbb{R}^m$  pour avoir une base de  $\text{Col}(A)$ . En particulier, nous pouvons prendre la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

- Si  $\text{rang}(A) = k < m$ , alors  $R$  a seulement  $k$  pivots et contient  $m - k$  lignes nulles.

Dans ce cas, nous avons  $\text{Col}(A) \neq \text{Col}(R)$  en général (sauf si la matrice  $A$  possède les mêmes  $m - k$  lignes nulles que  $R$ ).

Comme  $\dim(\text{Col}(A)) = k$ , il suffit de choisir  $k$  colonnes linéairement indépendantes de  $A$  pour avoir une base de  $\text{Col}(A)$ . Par exemple, nous pouvons choisir les  $k$  colonnes de  $A$  correspondants aux  $k$  pivots de  $R$ . En effet, nous pouvons montrer que les colonnes de  $A$  et de  $R$  ont les mêmes relations de dépendance linéaire.

Considérons à nouveau le système d'équations linéaires à  $m$  équations et  $n$  inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \quad (3) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (m) \end{array} \right. \quad (*)$$

Nous avons vu que nous pouvons exprimer ce système sous forme matricielle :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ .

De plus, nous avons défini la matrice augmentée associée au système (\*) :

$$[A \mid \vec{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Les résultats obtenus au chapitre 1 peuvent se reformuler de la manière suivante :

**Théorème.**

1. Si  $\text{rang}(A) < \text{rang}([A \mid \vec{b}])$  alors le système n'a pas de solution.
2. Si  $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) = n$  alors le système possède une solution unique.
3. Si  $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) < n$  alors le système possède une infinité de solutions.

*Preuve.* Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang ni les solutions du système. Par conséquent, il suffit de considérer la matrice échelonnée-réduite associée au système :

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right]$$

pour conclure. ■

**Théorème du rang.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Nous avons

$$\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

*Preuve.* Nous avons

$$(\text{nombre de variables libres}) + (\text{nombre de pivots}) = (\text{nombre d'inconnues})$$
■