Les propositions suivantes sont une conséquence directe de la définition d'espace vectoriel :

Proposition. Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.

a) Si $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}$ alors $\vec{u}=\vec{v}$ (simplification à droite).

b) Si $\vec{w}+\vec{u}=\vec{w}+\vec{v}$ alors $\vec{u}=\vec{v}$ (simplification à gauche).

Preuve.

a) Nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{w} &= \vec{v}+\vec{w} \\
(\vec{u}+\vec{w})+(-\vec{w}) &= (\vec{v}+\vec{w})+(-\vec{w}) \\
\vec{u}+\big(\vec{w}+(-\vec{w})\big) &= \vec{v}+\big(\vec{w}+(-\vec{w})\big) && \text{par (3)} \\
\vec{u}+\vec{0} &= \vec{v}+\vec{0} && \text{par (5)} \\
\vec{u} &= \vec{v} && \text{par (4)}
\end{aligned}$$

b) Comme l'axiome (2) nous donne

$$\vec{w}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{w},$$

nous avons le résultat en utilisant la partie a). ■

Proposition. Soit V un espace vectoriel. Si $\vec{v} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

a) $0\vec{v} = \vec{0}$

b) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

c) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Preuve.

a) Nous avons

$$\begin{aligned}
0\vec{v} + 0\vec{v} &= (0+0)\vec{v} && \text{par (8)} \\
0\vec{v} + 0\vec{v} &= 0\vec{v} && \\
(0\vec{v} + 0\vec{v}) + (-0\vec{v}) &= 0\vec{v} + (-0\vec{v}) && \\
0\vec{v} + \big(0\vec{v} + (-0\vec{v})\big) &= 0\vec{v} + (-0\vec{v}) && \text{par (3)} \\
0\vec{v} + \vec{0} &= \vec{0} && \text{par (5)} \\
0\vec{v} &= \vec{0} && \text{par (4)}
\end{aligned}$$

b) Nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} &= \alpha(\vec{0} + \vec{0}) && \text{par (7)} \\
\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} &= \alpha\vec{0} && \text{par (4)} \\
(\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}) + (-\alpha\vec{0}) &= \alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0}) && \\
\alpha\vec{0} + \big(\alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0})\big) &= \alpha\vec{0} + (-\alpha\vec{0}) && \text{par (3)} \\
\alpha\vec{0} + \vec{0} &= \vec{0} && \text{par (5)} \\
\alpha\vec{0} &= \vec{0} && \text{par (4)}
\end{aligned}$$

c) Nous devons montrer que $\vec{v}+(-1)\vec{v}=\vec{0}$ pour tout $\vec{v}\in V$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}+(-1)\vec{v} &= 1\vec{v}+(-1)\vec{v} && \text{par (10)}\\
\vec{v}+(-1)\vec{v} &= \big(1+(-1)\big)\vec{v} && \text{par (8)}\\
\vec{v}+(-1)\vec{v} &= 0\vec{v} && \\
\vec{v}+(-1)\vec{v} &= \vec{0} && \text{par la partie a)}
\end{aligned}$$

■

Remarque. Dans l'espace vectoriel de l'exemple 9,

- la propriété $0\vec{v}=\vec{0}$ s'écrit $x^0=1$
- la propriété $\alpha\vec{0}=\vec{0}$ s'écrit $1^\alpha=1$
- la propriété $(-1)\vec{v}=-\vec{v}$ s'écrit $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

Combinations linéaires

Définition. Soit V un espace vectoriel. Un vecteur $\vec{v}$ de V est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de V s'il peut s'écrire sous la forme

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont appelés *poids* (ou *coefficients*) de la combinaison linéaire.

Exemples

1. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et soient $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comme

$$3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v},$$

le vecteur $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ avec poids respectifs $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 2$.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et soient $p_1(x) = 2x^2 + 3$, $p_2(x) = x^2 - x$. Comme

$$4p_1(x) + (-8)p_2(x) = 4(2x^2 + 3) + (-8)(x^2 - x) = 8x + 12,$$

le polynôme $p(x) = 8x + 12$ est combinaison linéaire de p_1 et p_2 avec poids respectifs $\alpha_1 = 4$ et $\alpha_2 = -8$.

Indépendance linéaire

Définition. Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs de V.

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) si la seule solution de l'équation

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

est la solution nulle (ou triviale) :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots,\ x_n = 0.$$

Si par contre, il existe des poids $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \qquad (\star)$$

on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* (ou *liés*) et dans ce cas, $(\star)$ est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

Remarque. Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur $\vec{0}$ est toujours linéairement dépendant car

$$1 \cdot \vec{0} + 0\,\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + \dots + 0\,\vec{v}_n = \vec{0} \qquad \text{et } (1,0,0,\dots,0) \neq (0,0,0,\dots,0).$$

Exemples

1. Soit $V = \mathbb{R}^3$. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned}
\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0} \quad &\iff \quad \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. Par contre, les vecteurs

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants. En effet,

$$\begin{aligned}
\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_2\vec{w}_2 + \alpha_3\vec{w}_3 = \vec{0} \quad &\iff \quad \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 \phantom{{}+\alpha_3} = 0 \\ \phantom{\alpha_1 + {}} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = {-\alpha_2} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$(-2)\vec{w}_1 + 1\vec{w}_2 + (-1)\vec{w}_3 = \vec{0}.$$

3. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Les polynômes

$$p_1(x) = 1\,, \qquad p_2(x) = x\,, \qquad p_3(x) = x^2\,, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Par contre, les polynômes

$$q_1(x) = x^2 - 2x\,, \qquad q_2(x) = x^2 + 3\,, \qquad q_3(x) = 2x + 3\,, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement dépendants car

$$1\, q_1(x) + (-1) q_2(x) + 1\, q_3(x) = 0\,.$$

4. Soit $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \sin(x)$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \sin(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

nous avons en particulier, en prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \sin(0) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Par contre, les fonctions

$$g_1(x) = \cos^2(x), \qquad g_2(x) = \sin^2(x) \qquad \text{et} \qquad g_3(x) = \cos(2x)$$

sont linéairement dépendantes car nous savons que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \iff 1\, g_1(x) + (-1) g_2(x) + (-1) g_3(x) = 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5. Soit $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x), \qquad f_2(x) = \cos(3x) \qquad \text{et} \qquad f_3(x) = \cos^3(x)$$

sont linéairement dépendantes. En effet, nous savons que

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \iff 3\,f_1(x) + 1\,f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alternativement, nous pouvons résoudre

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \cos(3x) + \alpha_3 \cos^3(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{\pi}{3}$ nous obtenons le système homogène

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \cos(0) + \alpha_3 \cos^3(0) &= 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \alpha_2 \cos(\pi) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 \qquad + 3\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Comme la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

nous retrouvons la relation de dépendance linéaire

$$3\,f_1(x) + 1\,f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème. (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ des vecteurs de V (avec $k \geqslant 2$).

L'ensemble $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de $\mathcal{S}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve. Analogue au cas $V = \mathbb{R}^n$ traité au chapitre 1. ■

Corollaire. Si l'ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ est linéairement dépendant *pour n'importe quel choix de $\vec{v} \in V$*.

Preuve. Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est linéairement dépendant, alors au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Supposons que $\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \ldots + \beta_n \vec{v}_n$. Nous avons donc

$$\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \ldots + \beta_n \vec{v}_n + 0\vec{v}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ est linéairement dépendant. ■

Corollaire. Si $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants alors tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ est formé de vecteurs linéairement indépendants.

Preuve. Supposons qu'un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ est formé de vecteurs linéairement dépendants. Le corollaire précédent entraîne que l'ensemble $\mathcal{S}$ est aussi formé de vecteurs linéairement dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ■

Sous-espaces vectoriels

Définition. Soit V un espace vectoriel et soit $W \subset V$ un sous-ensemble non-vide de V.
On dit que W est un *sous-espace vectoriel de V* si W est lui-même un espace vectoriel avec les mêmes opérations d'addition et multiplication par un scalaire.

Proposition. Soit V un espace vectoriel et soit $W \subset V$ un sous-ensemble de V.
Alors W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

0. Le vecteur zéro $\vec{0}$ de V est contenu dans W.

1. Si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ alors $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

2. Si $\vec{w} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \vec{w} \in W$

En d'autres termes, $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V si toute combinaison linéaire d'éléments de W est un élément de W.

Preuve. Les conditions 0, 1 et 2 correspondent aux axiomes 4, 1 et 6 respectivement.
En prenant $\lambda = -1$, la condition 2 nous donne l'axiome 5 :

$$\text{si } \vec{w} \in W \text{ alors } -\vec{w} = (-1)\vec{w} \in W .$$

Les autres axiomes restent valables sur W car ils le sont dans V. ■

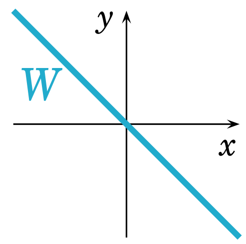
Remarques.

- Si V est un espace vectoriel, alors V est le plus grand sous-espace vectoriel de V et l'ensemble $\{\vec{0}\} \subset V$ est le plus petit sous-espace vectoriel de V. En effet, nous avons
$$\vec{0} \in \{\vec{0}\}, \qquad \vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \qquad \text{et} \qquad \lambda\vec{0}=\vec{0} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Pour montrer qu'un ensemble non-vide est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est plus simple à faire.

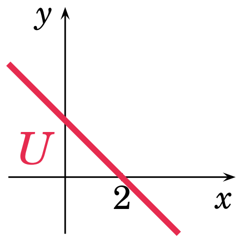
Exemples

1. L'ensemble $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   En effet, le vecteur $(0,0)$ est dans W et comme les éléments de W sont de la forme $(x,-x)$, avec $x \in \mathbb{R}$, nous avons :
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ -(x_1+x_2) \end{bmatrix} \in W,$$
$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ -\lambda x \end{bmatrix} \in W.$$



   $W \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par l'origine.



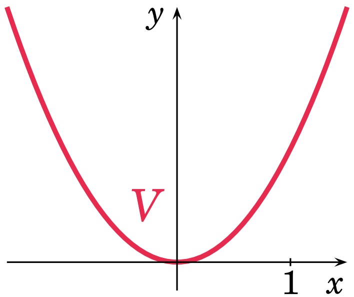
2. L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$ *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, il suffit de constater que $(0,0) \notin U$.

   $U \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par $(0,2)$.

3. L'ensemble $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ même si $(0,0) \in V$. En effet, les éléments de V sont de la forme (x, x^2), avec $x \in \mathbb{R}$, d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix} \qquad \text{en général}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda x \\ (\lambda x)^2 \end{bmatrix} \qquad \text{en général}$$



4. L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la somme de deux fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire reste continue.

5. L'ensemble $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$

6. L'ensemble $\mathbb{P}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice de taille $m \times n$.

L'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 & \qquad (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 & \qquad (2) \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 & \qquad (m) \end{array} \right.$$

forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n .$$

En effet, nous commençons par remarquer que $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Nul}(A)$.

Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{Nul}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\left. \begin{array}{r} A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0} \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} \vec{x}+\vec{y} \in \mathrm{Nul}(A) \\ \lambda\vec{x} \in \mathrm{Nul}(A) \end{array} \right.$$

Attention : Si $\vec{b} \neq \vec{0}$, alors les solutions du système inhomogène

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ne forment pas de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ car $\vec{x} = \vec{0}$ n'est pas solution du système.