4. Espaces vectoriels

4.1. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Définition. Soit V un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *vecteurs* sur lequel sont définis deux opérations appelées *addition* et *multiplication par un scalaire*.

On dit que V est un *espace vectoriel* si les dix axiomes suivants sont satisfaits :

1. La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est un élément de V.
2. L'addition est commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, pour tout $\vec{u},\vec{v}\in V$.
3. L'addition est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, pour tout $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$.
4. Il existe un élément $\vec{0}\in V$, appelé *vecteur zéro*, tel que $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$, pour tout $\vec{v}\in V$.
5. Pour chaque $\vec{v}\in V$ il existe un élément $-\vec{v}\in V$ tel que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.
6. Le multiple scalaire de $\vec{v}$ par $\alpha\in\mathbb{R}$, noté $\alpha\vec{v}$, est un élément de V.
7. Si $\vec{u},\vec{v}\in V$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.
8. Si $\vec{v}\in V$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ alors $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$.
9. Si $\vec{v}\in V$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ alors $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$.
10. Si $\vec{v}\in V$ alors $1\vec{v}=\vec{v}$.

Remarques.

- A l'aide de ces axiomes, nous pouvons montrer que le vecteur $\vec{0}$ de l'axiome 4 est unique. En effet, supposons que $\vec{w}$ est un vecteur de V qui satisfait
$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{v} \qquad \text{pour tout } \vec{v}\in V\,.$$
Comme cette propriété est valable pour $\vec{v}=\vec{0}$, nous avons
$$\vec{0}+\vec{w}=\vec{0}\,.$$
L'axiome 2 nous donne alors
$$\vec{w}+\vec{0}=\vec{0}\,.$$
Comme l'axiome 4 nous donne aussi $\vec{w}+\vec{0}=\vec{w}$, nous avons bien $\vec{w}=\vec{0}$.
- De manière analogue nous pouvons montrer que le vecteur $-\vec{v}$ de l'axiome 5 est unique pour chaque choix de $\vec{v}$. Il est appelé *opposé* de $\vec{v}$.
- Pour montrer qu'un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il faut montrer qu'il vérifie tous les dix axiomes (voir exemples 1–9 plus bas).
- Si un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire *ne satisfait pas* au moins un des axiomes, alors l'ensemble *n'est pas* un espace vectoriel (voir exemple 10 plus bas).

Exemples

1. Le plan $\mathbb{R}^2$ formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } x, y \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

- *addition :*

  si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, alors $$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $$\lambda\vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. L'espace $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } x, y, z \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

- *addition :*

si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, alors
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- *multiplication par un scalaire :*

si $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\lambda\vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-tuples

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } x_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, n,$$

muni des opérations :

- *addition :*

  si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors $$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $$\lambda\vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

4. L'ensemble $M_{2,2}(\mathbb{R})$ des matrices de taille 2×2 à coefficients réels

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } a_{jk} \in \mathbb{R},$$

muni des opérations :

- *addition :*

  si $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, alors

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $\quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. L'ensemble $M_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels muni des opérations :

- *addition :*

  si $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, alors

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

6. L'ensemble $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad \text{avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

muni des opérations :

- *addition :*

  si $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, alors

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \\ &= (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_2\end{aligned}$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\ &= (\lambda a_2) x^2 + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_2\end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $p(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

7. L'ensemble $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,$$

avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, muni des opérations :

- *addition :*

  si $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$, alors

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)\\ &= (a_n + b_n) x^n + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_n\end{aligned}$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)\\ &= (\lambda a_n) x^n + \ldots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_n\end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $p(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

8. L'ensemble $\boldsymbol{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions réelles d'une variable réelle muni des opérations :

- *addition :*

  si $f, g \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors

  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $f \in \boldsymbol{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

  $$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

9. L'ensemble $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ des nombres réels positifs muni des opérations :

- *addition :*
  si $x, y \in V$, alors
  $$x \oplus y = xy$$
- *multiplication par un scalaire :*
  si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
  $$\lambda \odot x = x^{\lambda}$$

est un espace vectoriel. Pour le voir, nous devons vérifier que V satisfait les dix axiomes :

1. Si $x, y \in V$, alors $x > 0$, $y > 0$ et $x \oplus y = xy > 0$. Par conséquent, $x \oplus y \in V$.

2. L'addition est commutative :
$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x, \qquad \text{pour tout } x, y \in V.$$

3. L'addition est associative :
$$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (yz) = x \oplus (y \oplus z), \qquad \text{pour tout } x, y, z \in V.$$

4. Le *vecteur zéro* est le nombre réel 1 car
$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

5. L'opposé de x est $\frac{1}{x}$ car
$$x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1, \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

6. Si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $x > 0$ et $\lambda \odot x = x^{\lambda} > 0$. Par conséquent, $\lambda \odot x \in V$.

7. Si $x, y \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).$$

8. Si $x \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x).$$

9. Si $x \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$(\alpha\beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^{\beta})^{\alpha} = \alpha \odot (x^{\beta}) = \alpha \odot (\beta \odot x).$$

10. Si $x \in V$ alors $$1 \odot x = x^{1} = x, \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

10. Le plan $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes :

- *addition :*

  si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- *multiplication par un scalaire :*

  si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

n'est pas un espace vectoriel.

En effet, malgré le fait que les axiomes 1–9 sont satisfaits avec cette multiplication par un scalaire modifiée, l'axiome 10 ne l'est pas :

$$\text{si } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ avec } x_2 \neq 0, \text{ alors } 1\vec{x} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{x}.$$