

4. Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4-k & 2 & -2 \\ -5 & 3-k & 2 \\ -2 & 4 & 1-k \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible

Rappel: A n'est pas inversible $\iff \det(A) = 0$

Le calcul du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 4-k & 2 & -2 \\ -5 & 3-k & 2 \\ -2 & 4 & 1-k \end{bmatrix} \underset{C_3 \rightarrow C_3 + C_2}{=} \det \begin{bmatrix} 4-k & 2 & 0 \\ -5 & 3-k & 5-k \\ -2 & 4 & 5-k \end{bmatrix} \\ &\underset{L_2 \rightarrow L_2 - L_3}{=} \det \begin{bmatrix} 4-k & 2 & 0 \\ -3 & -1-k & 0 \\ -2 & 4 & 5-k \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_3}{=} (5-k) \det \begin{bmatrix} 4-k & 2 \\ -3 & -1-k \end{bmatrix} \\ &= (5-k)[(4-k)(-1-k) - 2(-3)] = (5-k)(k^2 - 3k + 2) \\ &= (5-k)(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

Par conséquent, A n'est pas inversible si et seulement si $k \in \{1, 2, 5\}$.

3.2. Règle de Cramer et volume

Notation. Soit $A = \left[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n \right]$ une matrice de taille $n \times n$ avec colonnes $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. La matrice de taille $n \times n$ obtenue en remplaçant la colonne \vec{a}_j de A par le vecteur \vec{b} est notée $A_j(\vec{b})$:

$$A_j(\vec{b}) = \left[\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_{j-1} \ \vec{b} \ \vec{a}_{j+1} \ \cdots \ \vec{a}_n \right].$$

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ alors } A_3(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ alors } I_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème (Règle de Cramer). Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. L'unique solution $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est telle que

$$x_j = \frac{\det(A_j(\vec{b}))}{\det(A)}, \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, n.$$

Preuve. Soit $I = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix}$ la matrice identité. Nous avons

$$\begin{aligned} A_j(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{b} & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{e}_1 & \cdots & A\vec{e}_{j-1} & A\vec{x} & A\vec{e}_{j+1} & \cdots & A\vec{e}_n \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_{j-1} & \vec{x} & \vec{e}_{j+1} & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix} = A I_j(\vec{x}) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(A_j(\vec{b})) &= \det(A I_j(\vec{x})) = \det(A) \det(I_j(\vec{x})) \\ &= \det(A) x_j. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse la matrice A est inversible, nous trouvons

$$x_j = \frac{\det(A_j(\vec{b}))}{\det(A)}, \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Remarque. La règle de Cramer est utile, entre autres, pour étudier la dépendance de la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ en fonction du vecteur \vec{b} . Par contre, elle n'est pas très pratique pour des calculs explicites (sauf éventuellement dans le cas où A est une matrice de taille 2×2 ou 3×3).

Exemple

Utiliser la règle de Cramer pour résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Nous avons ici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_3(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Le calcul des déterminants nous donne :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \rightarrow C_1 + 3C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 + 2C_2}}{\uparrow} = \det \begin{bmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 17 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{\uparrow} = (-1) \det \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 17 & 2 \end{bmatrix} = -(22 - 17) = -5$$

$$\det A_1(\vec{b}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \rightarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 + 2C_2}}{\uparrow} = \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{\uparrow} = (-1) \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = -(10 - 7) = -3$$

$$\det A_2(\vec{b}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \rightarrow C_1 - 3C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 2C_2}}{\uparrow} = \det \begin{bmatrix} -4 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -12 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{\uparrow} = (1) \det \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -4 & -12 \end{bmatrix} = 48 - 36 = 12$$

$$\det A_3(\vec{b}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \rightarrow C_1 + 3C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_2}}{\uparrow} = \det \begin{bmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 17 & 4 & 7 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{\uparrow} = (-1) \det \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} = -(77 - 85) = 8$$

Par conséquent,

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\vec{b}))}{\det(A)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(\vec{b}))}{\det(A)} = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3(\vec{b}))}{\det(A)} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Formule pour la matrice inverse

La règle de Cramer nous fournit aussi une formule pour le calcul de la matrice inverse.

Rappel. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le *cofacteur* (j, k) de A est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

où A_{jk} est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la j -ème ligne et la k -ème colonne :

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Définition. Soit A une matrice de taille $n \times n$. La matrice

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

est appelée la *matrice des cofacteurs de A* .

La transposée de cette matrice est appelée la *matrice adjointe de A* , notée $\text{adj}(A)$:

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T$$

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice des cofacteurs de A et la matrice adjointe de A .

Les cofacteurs de la matrice A sont

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, & C_{12} &= - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3, & C_{13} &= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \\ C_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1, & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4, \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrices des cofacteurs de A est $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

et la matrice adjointe de A , $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Théorème. Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Exemple

Calculer la matrice inverse de la matrice de l'exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comme

$$\det(A) = -4 \quad \text{et} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

nous trouvons

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Remarque. L'importance du théorème précédent réside dans le fait que le coefficient situé à la j -ème ligne et la k -ème colonne de la matrice A^{-1} est

$$(A^{-1})_{jk} = \frac{C_{kj}}{\det(A)}.$$

Par conséquent, pour calculer un seul coefficient de la matrice inverse, il n'est pas nécessaire de calculer toute la matrice.

Exemple

(Série 5, exercice 4) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Alors le coefficient b_{21} de la matrice B est égal à $b_{21} = \frac{C_{12}}{\det(A)}$.

Comme

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{et} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \rightarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

nous trouvons $b_{21} = \frac{-4}{1} = -4$.

Aire

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs du plan.

Le *parallélogramme engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v}* est l'ensemble

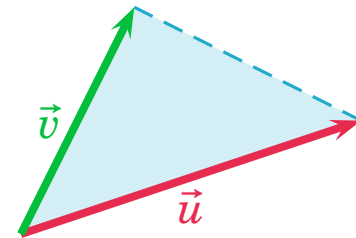
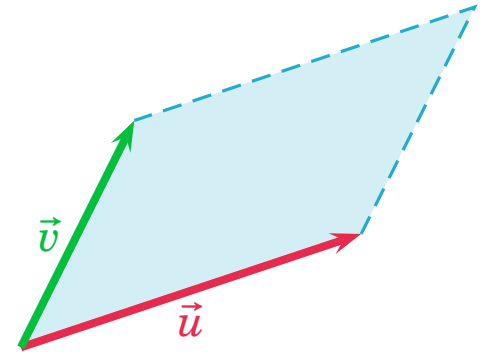
$$\{\vec{w} \in \mathbb{R}^2 : \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq 1\}$$

L'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{A} = \left| \det \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \right|$$

Par extension, l'aire du triangle engendré par \vec{u} et \vec{v} est

$$\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \right|$$



Volume

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs.

Le *parallélépipède engendré par les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w}* est l'ensemble

$$\{\vec{z} \in \mathbb{R}^3 : \vec{z} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1 \text{ et } 0 \leq \gamma \leq 1\}$$

Le volume du parallélépipède engendré par \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{V} = \left| \det \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \right|$$

